Scuola universitaria professionale
della Svizzera italiana
SUPSI

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

Febbraio 2018

Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare

Silvia Sbaragli e Elena Franchini

Rapporto di ricerca del Dipartimento formazione e apprendimento

Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica
di quinta elementare. Rapporto di ricerca del Dipartimento formazione
e apprendimento.

Locarno, 2018
Dipartimento formazione e apprendimento
Piazza San Francesco 19, 6600 Locarno

Responsabilità del progetto: Silvia Sbaragli
Autrici: Silvia Sbaragli e Elena Franchini
Revisione: Michele Canducci

Impaginazione: Dina Parini Copertina: Jessica Gallarate
ISBN 978-88-85585-08-9

Ringraziamenti

Ringraziamo Emanuele Berger, Rezio Sisini e Tiziana Zaninelli per il sostegno fornito alla stesura di questo documento e il centro innovazione e ricerca sui sistemi educativi (CIRSE) per la realizzazione del progetto, in particolare Michele Egloff e Alberto Crescentini.
Un ringraziamento particolare va a tutti i docenti e ai loro allievi che hanno somministrato e svolto la prova nelle proprie classi, così da consentire l'analisi dei risultati e la relativa valutazione didattica. In particolare, ai direttori delle scuole medie di Locarno 1, Locarno 2 e Minusio: Daniele Bianchetti, Carla Stockar e Paolo Iaquinta e agli insegnanti di matematica: Marco Banfi, Rocco Legato, Lara Caverzasio, Daniele Pezzi, Sara Cataldi e Daniele Zezza, per la disponibilità fornita nella seconda somministrazione.
Un ringraziamento va ad Alice Lemmo, Romina Casamassa e Gemma Carotenuto per il contributo fornito nell'effettuare le interviste – in particolare ad Alice per le preziose analisi di alcuni quesiti – e a Michele Canducci e Spartaco Calvo per la lettura critica del documento e i preziosi consigli.

Sommario

Introduzione

Il presente rapporto intende fornire al mondo scolastico: istituzioni, ispettori, direttori, docenti, e, di conseguenza, allievi e famiglie, l'interpretazione in chiave didattica dei risultati delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare. Nel periodo 2013-2015 è stato condotto dal centro innovazione e ricerca sui sistemi educativi (CIRSE), su mandato dell'Ufficio Scuole Comunali (USC), un progetto volto a valutare le competenze degli allievi ticinesi su alcuni ambiti della matematica, nello specifico, *Numeri e calcolo* e *Grandezze e misure*. Per ognuno di questi si è scelto di indagare tre aspetti di competenza della matematica: *Matematizzare e modellizzare*, *Eseguire e applicare* e *Sapere e riconoscere*. La creazione dei quesiti ha coinvolto docenti di scuola elementare e scuola media ed esperti in didattica della matematica operanti al Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport (DECS) e al Dipartimento formazione e apprendimento (DFA). La richiesta era di produrre quesiti il più possibile monodimensionali per favorire un'analisi mirata e significativa. La descrizione dell'intero processo di creazione, pre-test, analisi statistica della robustezza dei quesiti, analisi quantitativa e settoriale dei risultati è riportata in Crescentini (2016).
Oltre a questa analisi generale, è emersa l'esigenza da parte delle istituzioni di approfondire le riflessioni sui risultati in modo più puntuale e specifico, adottando un'ottica interpretativa propria della didattica della matematica, in grado di mettere in evidenza punti di forza e debolezze nelle prestazioni degli allievi, così come era stato realizzato per la somministrazione effettuata in quarta elementare (Sbaragli & Franchini, 2014). Tale analisi consente di effettuare importanti riflessioni sul processo di insegnamento/apprendimento della matematica.
In questo rapporto si è scelto di concentrare l'analisi sull'aspetto *Matematizzare e modellizzare*, che rappresenta una componente fondamentale della mobilitazione di competenze in matematica. Si riportano le considerazioni didattiche scaturite dall'analisi dei risultati dei 30 quesiti di questo ambito; in particolare, per i 15 di questi quesiti ritenuti più significativi, si è scelto di approfondire e rafforzare le considerazioni, grazie ad una fase successiva di ricerca basata su interviste individuali effettuate agli studenti volte ad indagare le strategie utilizzate e le motivazioni che conducono agli errori più frequenti.
Il presente documento prevede una riflessione sull'utilizzo formativo delle prove standardizzate, la presentazione delle caratteristiche delle prove somministrate, l'organizzazione della somministrazione, una sintesi dei risultati ottenuti dal CIRSE, l'esplicitazione di un quadro teorico sul tema *Matematizzare e modellizzare*, la descrizione della fase di codifica, di intervista a posteriori e analisi didattica dei quesiti scelti, una lettura dei risultati dal punto di vista della didattica della matematica organizzata in 7 paragrafi.

1. Il ruolo delle prove standardizzate

1. Il ruolo delle prove standardizzate

Da alcuni anni è al centro di forti dibattiti epistemologici, didattici e talvolta ideologici, il problema di integrare i metodi, gli strumenti e soprattutto i risultati delle valutazioni standardizzate condotte a livello di sistema nella valutazione formativa che ogni insegnante compie nella propria classe (Looney, 2011). Come precisa Vergani (2002):

> «con valutazione di sistema si intende generalmente l'insieme delle attività che permettono di formulare una valutazione complessiva sul funzionamento di un sistema formativo. La valutazione di sistema si configura di conseguenza come una valutazione di sintesi costituita da tre momenti fondamentali:
> - una documentazione;
> - dati provenienti da osservazioni esterne;
> - comparazioni con altre esperienze.
>
> Importante è ricordare che la valutazione di sistema non è mai da intendere come giudizio finale, ma piuttosto come un monitoraggio continuo con l'obiettivo di promuovere».
> (citato in Sbaragli & Franchini, 2014, p. 12)

Come era già stato messo in evidenza in Sbaragli & Franchini (2014), le valutazioni esterne hanno un ruolo fondamentale per il sistema di istruzione perché aiutano a verificare se le scuole stanno lavorando verso standard comuni, in linea con i piani di studio vigenti nei diversi paesi, allo scopo di evitare di cadere nell'autoreferenzialità. In letteratura si ribadisce la necessità di uno stretto legame tra le prove standardizzate e il curricolo "ufficiale" di ogni paese, in modo tale da massimizzare la loro affidabilità, validità e utilità (Mons, 2009; Meckes & Carrasco, 2006).
Per creare tale legame dal punto di vista didattico, sarebbe importante favorire una formazione specifica per i docenti (Barber & Fullan, 2007), che consenta loro, partendo dai risultati delle prove standardizzate, di effettuare una trasposizione didattica più consapevole, che abbia una significativa ed efficace ricaduta sui processi di insegnamento/apprendimento della matematica. Come suggerisce Fandiño Pinilla (2002), citato in (Sbaragli & Franchini, 2014, p. 15), le prove standardizzate:

> «sostengono un aggiornamento continuo delle istituzioni e dei docenti sugli ultimi risultati della ricerca favorendo la nascita di nuovi strumenti che consentono all'insegnante:
> - di conoscere meglio lo studente;
> - di mettere sotto analisi la propria trasposizione didattica (...);
> - di affrontare in modo preparato un'analisi a priori e a posteriori dell'ingegneria didattica utilizzata, cioè di quell'insieme di azioni didattiche da lui organizzate per favorire un particolare apprendimento per la classe e la successiva valutazione;
> - di valutare costantemente i curricola e le differenze che intercorrono tra gli obiettivi (ciò che volevamo ottenere) e i risultati (ciò che abbiamo ottenuto), cioè tra curricolo intended e curricolo implemented».

Per un approfondimento di quest'ultimo punto si veda Giménez Rodríguez, 1997.
Il coordinamento di tutti questi aspetti potrebbe consentire al docente di indirizzare i processi di insegnamento/apprendimento della matematica in base ai bisogni dei propri allievi. Come afferma Bolondi (2011, p. 6):

> «Una valutazione esterna, pur con tutti i suoi limiti (...), permette all'insegnante di riequilibrare gli ambiti che sono oggetto di valutazione: è frequente che la trasposizione didattica e di conseguenza le verifiche interne si concentrino su particolari argomenti o

> su determinati processi, finendo per trascurarne altri e focalizzando di conseguenza in modo troppo specifico il lavoro degli allievi. Questo tipo di valutazione permette inoltre di confrontare i risultati di apprendimento dei singoli allievi e della classe nel suo complesso con gruppi e popolazioni di vario tipo, e suggerire modalità di verifica diverse dalle abituali».

Un ulteriore vantaggio insito nella valutazione esterna è quello di evitare alcuni effetti negativi legati a quella interna, che possono rendere le prove non significative. I più comuni sono:
- l'effetto stereotipia che consiste in un irrigidimento dell'opinione sull'alunno da parte dell'insegnante. L'insegnante si convince che la situazione dello studente non possa cambiare ed evolversi positivamente o negativamente nel tempo. La sua valutazione e i suoi giudizi nei confronti del ragazzo rimangono pressoché immutati nel tempo riferendosi sempre alla propria percezione soggettiva;
- l'effetto alone che porta il docente a interpretare gli esiti di una prova in un contesto di situazioni ed elementi che le rendono falsate;
- il condizionamento profetico cioè la tendenza dell'insegnante a valutare come scarsi i risultati di particolari allievi con i quali è certo di non poter raggiungere determinati obiettivi.

La valutazione effettuata dall'insegnante di classe risulta limitata e spesso porta a "guidare" la risposta degli allievi verso quella attesa, a causa dei seguenti limiti:
- uso da parte dell'insegnante di prassi e metodologie attese;
- comportamento secondo copioni standard da parte dell'allievo;
- attese reciproche tra docente e allievi che influenzano le risposte e le loro interpretazioni;
- uso in aula di un linguaggio condiviso che spesso già di per sé comporta risposte standard; infatti, l'uso di una determinata terminologia da parte dell'insegnante, la sintassi delle frasi, i simboli, le rappresentazioni privilegiate rispetto ad altre, costituiscono a poco a poco un lessico familiare per i ragazzi che tendono ad interpretare le domande in base a richieste non solo esplicite, ma soprattutto implicite dell'insegnante e, analogamente, ogni docente impara a leggere (e talvolta a decodificare) le risposte e gli elaborati degli allievi interpretandoli alla luce sia delle caratteristiche personali di ognuno, sia a volte delle precedenti prestazioni.

Al contrario, l'uso di strumenti di valutazione non preparati dall'insegnante ha il vantaggio di svincolare l'alunno da clausole del contratto didattico (più o meno esplicite); la valutazione esterna può essere lo strumento adatto per abbattere certi pregiudizi e valutare abilità e conoscenze, epurandole (almeno in parte) dai comportamenti che questi dettavano.

Le prove standardizzate, però, non devono né possono sostituire la valutazione in classe dell'insegnante. Si pensi alle possibili complicazioni che si potrebbero verificare se avvenisse tale sostituzione:

> «- smarrimento dello studente che non riconosce le metodologie usuali;
> - incapacità di gestire situazioni non abituali;
> - scontro con un linguaggio non usuale;
> - non riconoscimento degli obiettivi della valutazione;
> - non riconoscimento del senso delle richieste;
> - incongruenza tra gli apprendimenti raggiunti e la richiesta;
> - aumento delle interferenze emotive in presenza di valutatori esterni alla classe o alla scuola;
> - ...».
>
> (Fandiño Pinilla, 2005b, p. 2)

Alcuni studi indicano anche i limiti di validità e affidabilità delle valutazioni su larga scala. Come riportato in Looney (2011), le valutazioni standardizzate, progettate per garantire che i dati siano validi, affidabili e generalizzabili, non possono facilmente certificare le prestazioni degli allievi su situazioni complesse quali il problem solving e la capacità di ragionare. Non possono inoltre fornire informazioni dettagliate utili per diagnosticare le cause specifiche delle difficoltà degli allievi, diagnosi che è invece ritenuta necessaria dalla recente ricerca in didattica della matematica. Inoltre, l'atteggiamento degli insegnanti evidenziato di fronte ad una prova standardizzata è riconducile a volte al "teaching to the test", ovvero alla sostituzione dell'insegnamento ordinario con un'attività di addestramento al superamento della prova, che comporta una concentrazione maggiore su quelle aree che più probabilmente saranno testate. Questo conduce a informazioni falsate sulle prestazioni e sui progressi degli allievi.
In quest'ottica, la direzione intrapresa a livello internazionale è quella di integrare i risultati delle valutazioni esterne con quelle condotte dagli insegnanti, completando lo sguardo soggettivo del docente che tiene conto di molteplici aspetti legati alle caratteristiche e al progresso del singolo allievo, con i risultati di una valutazione esterna e globale sull'intera popolazione scolastica.
Da questo punto di vista, l'intento del presente documento è di fornire utili riflessioni e strumenti che consentano ai docenti di approfondire ciò che avviene in classe, di regolare i processi di insegnamento/apprendimento della matematica e di far evolvere le proprie competenze valutative. L'analisi dei risultati fatta da ogni insegnante, che ha sott'occhio da un lato le prove dei propri allievi e, dall'altro, i risultati complessivi ottenuti dalla valutazione standardizzata, dovrebbe servire a mettere a fuoco la situazione complessiva della classe su un certo ambito di competenza, individuando le opportunità e i rischi nel percorso di apprendimento avviato. Inoltre, un'analisi didattica delle risposte degli allievi può evidenziare la natura e il peso delle difficoltà legate a fattori trasversali come la gestione dei diversi registri di rappresentazione, la comprensione della situazione, l'interpretazioni dei dati, il significato dei termini e dei simboli ecc. Lavorare in classe con le prove standardizzate permetterebbe un approfondimento del perché delle scelte, dando la possibilità all'insegnante di indagare con maggiore profondità il processo cognitivo che ha condotto l'allievo a fornire una certa risposta e trarre dunque informazioni utili per supportarlo nelle eventuali difficoltà così da regolare in seguito il proprio intervento didattico. Infatti una risposta corretta senza la richiesta da parte del docente di come ha ragionato l'allievo non fornisce informazioni importanti sulle competenze raggiunte. Questi fattori trasversali possono mettere in evidenza la presenza di misconcezioni radicate e atteggiamenti stereotipati legati a clausole del contratto didattico. In quest'ottica pensiamo sia fondamentale focalizzarsi non solo sui risultati positivi degli studenti, emersi da queste prove standardizzate, ma anche sull'analisi degli errori più diffusi commessi dagli allievi, con l'obiettivo quindi di fornire all'insegnante un utile strumento di lettura delle difficoltà in matematica. A questo scopo si è ritenuto utile per i docenti riportare nel documento commenti e analisi dei distrattori inseriti nei quesiti e riflessioni sulle risposte degli allievi. I dati restituiti dalle prove, in questo caso sottoposte a tutti gli allievi di V elementare, hanno infatti un effetto-leva enorme: amplificano qualunque fenomeno e ci fanno capire come molti comportamenti non siano casuali, ma nascondano, invece, ostacoli profondi di diversa natura.
Il docente può dunque contestualizzare i risultati di queste prove attraverso la conoscenza della propria scuola e degli allievi e leggerli nel modo più efficace. Può così individuare tematiche nelle quali i ragazzi (o una parte di essi) incontrano particolari difficoltà, nelle quali il percorso può venire rafforzato (ad esempio rielaborando la trasposizione didattica e l'ingegneria didattica, introducendo nuove modalità di valutazione, rimettendo a fuoco i traguardi di competenza), e punti di forza sui quali far leva per stimolare l'eccellenza o favorire il recupero di studenti

in difficoltà. Le prove, in definitiva, sono uno strumento *in più* in mano all'insegnante: uno strumento che ha il vantaggio di fornire dati confrontabili con quelli di un campione, e quindi restituire *oggettività* alla valutazione del docente.
Si tratta dunque di accettare queste prove come un contributo alla propria azione didattica, come un aiuto a riconoscere, classificare e valutare la complessità dei processi di insegnamento/apprendimento della matematica.

1.1. Il processo delle prove standardizzate di matematica

In questo paragrafo presentiamo in sintesi il processo che ha portato alla creazione dei quesiti sottoposti alla somministrazione; per un approfondimento si veda Crescentini (2016).
Nella prima fase della ricerca iniziata nel 2013 sono stati creati numerosi quesiti, realizzati da un gruppo di docenti di scuola elementare e media e rivisti da esperti di didattica della matematica. I quesiti sono stati elaborati dagli autori in modo da essere il più possibile focalizzati sull'ambito e aspetto di competenza che si desiderava valutare. Questa caratteristica, necessaria per l'analisi, rende i quesiti in sé differenti da quelli che normalmente sono utilizzati dai docenti durante la loro attività professionale e meno ricchi e significativi dal punto di vista didattico.
Successivamente, nei primi mesi dell'anno scolastico 2014-2015, è stata effettuata una fase di pre-test dei quesiti volta a identificare quelli più pertinenti ed efficaci a misurare e a discriminare, secondo il modello statistico della Item Response Theory (IRT), utilizzato nelle principali valutazione internazionali. In questa fase si sono assemblati 10 fascicoli differenti, testando un alto numero di quesiti, in previsione del fatto che almeno un 30% di essi sarebbe stato poi eliminato. Il modello di distribuzione dei fascicoli è stato pensato per garantire che ogni quesito fosse testato su almeno 300 allievi. Le classi del campione sono state estratte in modo da essere rappresentative della popolazione degli studenti ticinesi e hanno coinvolto circa 1600 allievi pari a circa il 50% della popolazione complessiva. L'analisi dei risultati del pre-test ha portato a selezionare una batteria di 90 quesiti - 15 per ogni ambito/aspetto di competenza - statisticamente validi e rappresentativi di vari livelli di difficoltà.
Questi 90 quesiti sono stati suddivisi in ugual numero in due fascicoli, ciascuno costituito da tre ambiti/aspetti di competenza alternati. Il primo fascicolo comprende 15 quesiti per *Grandezze e misure – Eseguire e applicare* (GM-EA), 15 quesiti per *Grandezze e misure – Sapere e riconoscere* (GM-SR), 15 quesiti per *Numeri e calcolo – Matematizzare e modellizzare* (NC-MT). Il secondo fascicolo invece comprende 15 quesiti per *Grandezze e misure – Matematizzare e modellizzare* (GM-MT), 15 quesiti per *Numeri e calcolo – Eseguire e applicare* (NC-EA), 15 quesiti per *Numeri e calcolo – Sapere e riconoscere* (NC-SR). I quesiti sono stati inseriti nei fascicoli in ordine crescente di difficoltà e alternati per settore.
Sono stati utilizzati più quesiti per ciascuna risorsa cognitiva al fine di identificare nel modo più preciso l'abilità di ogni allievo su determinati aspetti. La presenza di soli tre ambiti/aspetti all'interno di ogni fascicolo è legata al bisogno di non imporre eccessivi cambi di contenuto agli allievi stessi.
Le tipologie di quesiti somministrati per ciascun ambito/aspetto di competenza sono le seguenti:

Ambito e relativo aspetto di competenza	Quesiti a risposta aperta univoca	Quesiti a risposta aperta articolata	Quesiti a risposta chiusa	Totale
Grandezze e misure Sapere e riconoscere	5	0	10	15
Grandezze e misure Eseguire e applicare	9	1	5	15
Grandezze e misure Matematizzare e modellizzare	6	4	5	15
Numeri e calcolo Sapere e riconoscere	5	2	8	15
Numeri e calcolo Eseguire e applicare	10	0	5	15
Numeri e calcolo Matematizzare e modellizzare	6	4	5	15

Tabella 1. Tipologia di quesiti somministrati

Legenda esplicativa

Quesiti a risposta chiusa: domande con risposta a scelta multipla che presentano alcune (in questo caso 4) alternative di risposte, una sola delle quali è corretta.

Quesiti a risposta aperta univoca: domande in cui la risposta corretta è rigidamente definibile a priori (richiesta di un risultato univoco).

Quesiti a risposta aperta articolata: domande che richiedono la descrizione di un calcolo o di un procedimento oppure la giustificazione di una risposta o di una scelta.

Senza dubbio, da un punto di vista didattico, la tipologia che risulta più significativa è quella aperta-articolata, che consente di analizzare il processo risolutivo effettuato dall'allievo, e non solo il prodotto, e di vedere in alcuni casi la giustificazione delle scelte effettuate.
Dal 4 al 22 maggio 2015 è stata somministrata la prova standardizzata di matematica a tutti i 3012 allievi di quinta elementare del Canton Ticino. La ricerca ha coinvolto 193 classi, tra pubbliche (95,0%) e private (5,0%), e di queste 54 erano pluriclassi. Gli allievi avevano a disposizione un'ora di tempo per risolvere gli item di ciascun fascicolo. Su questi fascicoli è stata effettuata l'analisi generale riportata in Crescentini (2016).

1.2. La valutazione didattica delle prove standardizzate

La valutazione didattica dei quesiti è scaturita da due somministrazioni successive descritte di seguito.

Prima somministrazione.
Come già anticipato, per eseguire la valutazione didattica si è scelto di concentrare l'analisi sul processo *Matematizzare e modellizzare*, costituito da 15 item legati all'ambito *Numeri e calcolo* e 15 all'ambito *Grandezze e misure*. Gli item appartenenti a questa categoria sono di notevole interesse, poiché presentano uno stimolo in cui viene descritto un contesto realistico su cui lo studente deve operare, allo scopo di costruire un modello della situazione presentata.
La valutazione didattica puntuale delle risposte degli allievi ha previsto l'analisi dei protocolli di un campione di 508 allievi estratto casualmente dalle 3012 prove, in modo da garantire la validità statistica. Il campione è stato scelto in modo da bilanciare tutti i circondari scolastici del Canton Ticino e da essere equilibrato per genere; in questo modo sono state incluse quasi tutte le scuole.

Questo ha permesso di rilevare oltre alle percentuali di risposte corrette, scorrette e mancanti, anche le tipologie di errori più ricorrenti e individuare alcune ipotesi interpretative delle motivazioni che possono aver spinto gli allievi a fornire determinate risposte. Tuttavia, al fine di validare, completare e modificare le categorie interpretative create, è stata realizzata una successiva somministrazione accompagnata da interviste. In effetti, è importante, dal punto di vista didattico, cercare di indagare con più profondità il processo risolutivo e le motivazioni che indirizzano le scelte effettuate dagli studenti.

Seconda somministrazione.
Per validare le ipotesi formulate nella prima analisi dei risultati inerenti ai 30 quesiti selezionati, all'inizio dell'anno scolastico 2016/2017 sono stati nuovamente somministrati 15 quesiti, scelti tra quelli ritenuti più interessanti e per i quali non era ben esplicitato il processo risolutivo, e si è proceduto ad effettuare delle interviste individuali per indagare con più profondità i procedimenti adottati e le motivazioni alla base delle scelte effettuate. Tali quesiti sono stati raccolti in un fascicolo. Per fare in modo di raccogliere dati il più possibile confrontabili con quelli ottenuti in precedenza, era necessario individuare un campione simile a quello a cui era stata somministrata la prova standardizzata. Trattandosi dell'inizio dell'anno scolastico, non era possibile selezionare una popolazione dello stesso livello scolare del campione, poiché gli argomenti trattati in classe e l'esperienza scolastica sarebbero stati inferiori. Per questo motivo, si è individuato un campione di studenti di prima media, per i quali era ipotizzabile un livello paragonabile con quello degli allievi dell'ultimo mese della classe quinta elementare. Sono state coinvolte otto classi di tre scuole medie: Locarno 1, Locarno 2 e Minusio per un totale di 174 studenti.

Il fascicolo composto dai 15 item selezionati è stato somministrato durante le ore scolastiche ed è stato fornito un limite di tempo per risolverli proporzionale a quello dato all'intera prova standardizzata (20 minuti). A partire dall'analisi dei protocolli di questa seconda somministrazione, come già anticipato, sono stati intervistati alcuni studenti, selezionati in base alle risposte date al questionario, agli errori ricorrenti, ai comportamenti stereotipati che sono emersi già dall'analisi a priori dei quesiti.

Questa seconda fase ha coinvolto dai 5 ai 10 studenti per ciascuna mattina, ognuno dei quali è stato intervistato per circa 15-20 minuti. Il materiale prodotto (protocolli, schizzi, disegni, calcoli ecc.), sia durante la somministrazione del questionario, sia dall'intervista, è stato ritirato dai ricercatori e utilizzato esclusivamente come materiale di ricerca. L'intera procedura si è realizzata nel rispetto della privacy degli allievi.

In Tabella 2 vengono riportate le otto classi coinvolte nella somministrazione, specificando il numero di studenti ai quali è stato somministrato il fascicolo e il numero di studenti intervistati. Dopo aver raccolto tutte le informazioni e i dati necessari è stato fornito ai docenti delle classi coinvolte un report con i risultati emersi dalla somministrazione nella propria classe, che rappresenta una risorsa utile per il docente per effettuare una lettura di eventuali punti di forza e di debolezza dei propri allievi.

Scuola	Classe	N. studenti a cui è stato somministrato il fascicolo	N. studenti intervistati
Locarno 1	IA	20	9
	IC	19	10
Locarno 2	IA	24	12
	IB	20	8
	IC	21	14
Minusio	IA	22	7
	IB	23	12
	IC	23	13

Tabella 2. Numero di studenti coinvolti nell'indagine

2. Quadro teorico

2. Quadro teorico

2.1. Matematizzare e modellizzare

2.1.1. L'importanza del processo *Matematizzare e modellizzare*

Visto il crescente sviluppo scientifico-tecnologico della società e la notevole quantità e complessità di informazioni e dati che il cittadino è tenuto a gestire nella quotidianità, è riconosciuta a livello internazionale l'importanza della comprensione della matematica come elemento fondamentale nella formazione dei cittadini del domani. In particolare, la capacità di utilizzare gli strumenti e il ragionamento matematico in svariati contesti permette di comprendere a fondo e fare fronte a un numero sempre crescente di problemi e situazioni della vita quotidiana. Da un punto di vista didattico, sviluppare la capacità di applicare la matematica per comprendere e risolvere situazioni-problema reali è considerato attualmente in tutto il mondo uno dei principali obiettivi dell'educazione matematica (Eurydice, 2011; NCTM, 2000; OECD[1], 2006; 2010; 2013; 2016). Questa centralità è costantemente sottolineata da molte istituzioni internazionali come l'Unione Europea - si veda ad esempio il *Libro Bianco* sull'Educazione e la Formazione della Comunità Europea -, l'Unesco e l'OECD. In un documento della Comunità Europea, nella parte riguardante la competenza matematica, si trova scritto: «La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi nelle situazioni quotidiane» (Raccomandazioni del Parlamento e Consiglio Europei del 2006 sulle competenze chiave per il Lifelong Learning, p. 15). Inoltre, NCTM (1989) afferma che «è necessario che le applicazioni e la modellizzazione matematica occupino una posizione più centrale nell'educazione matematica a tutti i livelli» (p. 209).
Lo stesso *Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) suggerisce il ricorso a situazioni di apprendimento significative, a partire anche da contesti esterni alla scuola, da esperienze di vita quotidiana che consentano di lavorare sulla capacità di utilizzare concetti, principi e metodi della matematica per comprendere, spiegare, esaminare e rappresentare la realtà, intervenire con consapevolezza su di essa. Queste considerazioni hanno portato necessariamente un cambio di prospettiva in campo didattico, volto a spostare il focus da un insegnamento prettamente mnemonico e meccanico, legato a situazioni artificiose e fittizie, ad uno più improntato sulla capacità di risolvere problemi in contesti reali, finalizzato ad utilizzare la matematica per leggere e interpretare la realtà e intervenire con consapevolezza su di essa.
Queste capacità rientrano prevalentemente nel processo *Matematizzare e modellizzare*, competenza chiave per la formazione del pensiero matematico dell'allievo, che rappresenta uno dei quattro processi cognitivi dell'area matematica del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015). Tale processo, come mostra la ricerca in didattica, sarebbe da sviluppare fin dalla scuola elementare (Jones, Langrall, Thornton, & Nisbet, 2002). Gli allievi di questo ciclo scolastico sono in grado e dovrebbero affrontare situazioni che coinvolgono qualcosa in più rispetto all'esecuzione di semplici operazioni (English, 2002; English & Watters, 2004a); hanno bisogno di affrontare situazioni in cui possono esplorare informalmente, ad esempio, i significati di frazione, di rapporto, il concetto di proporzionalità, avere la possibilità di quantificare e interpretare informazioni qualitative o trattare e stimare grandezze che non si possono misurare direttamente (English, 2006).
Per questo motivo nei quadri di riferimento per la matematica delle principali indagini internazionali PISA (OECD, 2004; 2006; 2007; 2010; 2013; 2016), TIMSS e INVALSI, nazionali (CDPE, 2011) e cantonali (Sbaragli & Franchini, 2014) si sottolinea come sia necessario valutare gli apprendimenti degli allievi su questo processo. Non solo dunque misurare le conoscenze e le

[1] Organisation for Economic Co-operation and Development, in italiano: *Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico* (OCSE).

abilità in ambito matematico, ma anche la capacità di mettere in relazione questi saperi con dei contesti d'azione che devono essere affrontati. Si sottolinea dunque come risulti necessario sviluppare negli allievi queste capacità in modo che possano imparare a ragionare in modo matematico e a utilizzare concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni della vita quotidiana.

2.1.2. Caratteristiche del processo *Matematizzare e modellizzare*

Il processo di *matematizzazione* si riferisce all'attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all'interno del contesto reale nel mondo simbolico della matematica, e viceversa (Jupri & Drijvers, 2016). Esso trae origine dalla teoria *Realistic Mathematics Education* (RME), sviluppata in Olanda nel 1968 a partire dalle idee di Freudenthal, il quale suggeriva di lavorare con gli allievi a partire da contesti reali, e non puramente matematici astratti, considerando la realtà una componente cruciale per l'insegnamento della matematica, sia come fonte che come contesto in cui applicare le idee matematiche (Freudenthal, 1968; 1991; Treffers, 1987; 1991).
Secondo la teoria RME il termine *realtà* ha una connotazione molto ampia: si può riferire alla vita reale, ad un mondo fantastico o a situazioni matematiche nella misura in cui esse siano significative e immaginabili dagli allievi, in modo che, ad esempio, gli elementi essenziali della situazione proposta siano stati precedentemente sperimentati e compresi dall'allievo (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2013). In generale, dunque, si considera l'ambito naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive, oltre ad aspetti fantastici. Come ha sostenuto Freudenthal (1983, p. ix, citato in OECD, 2007), «i nostri concetti matematici, le nostre strutture e le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale».

L'OECD (2004) delinea all'interno della matematizzazione un particolare *ciclo*, ripreso e sottolineato anche in OECD (2013; 2016), che possiamo riassumere nei seguenti aspetti:

1. Partire da un problema reale.
2. Strutturare il problema in base a concetti matematici.
3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione).
4. Risolvere il problema matematico.
5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.

Nella terminologia proposta da PISA tale ciclo è descritto attraverso l'identificazione di alcuni processi che sono ritenuti fondamentali per la gestione del problema: *formulare* il problema, ovvero trasporlo dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato della disciplina, *utilizzare* i propri saperi per dare una risposta al problema che si è identificato, *interpretare* e *valutare* la pertinenza della soluzione ipotizzata in rapporto al contesto di realtà da cui si è partiti.

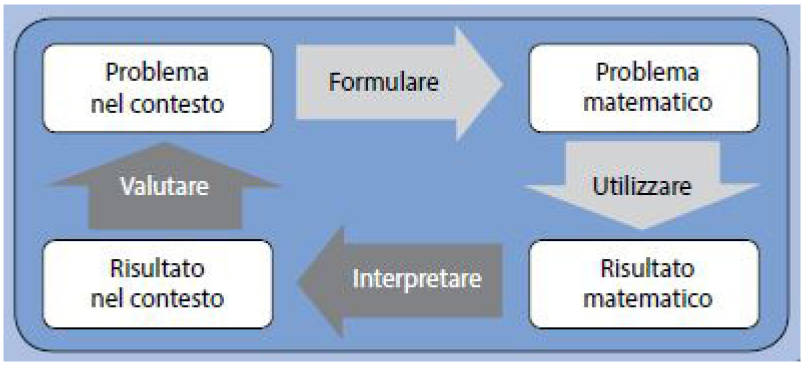


Figura 1. Il ciclo della matematizzazione tratto da PISA (OECD, 2013)

Il ciclo ideale illustrato in Figura 1 parte da un "problema nel contesto". Chi risolve un problema di questo tipo cerca di individuare gli aspetti matematici rilevanti della situazione, depurandola da tutto ciò che è ininfluente ai fini della risoluzione, trovando dunque una struttura, un *modello* astratto e ideale della situazione (ad esempio una formula, un'espressione o equazione algebrica, uno schema) basato sulle ipotesi elaborate, sui concetti e sulle relazioni individuate. In questo modo trasforma il "problema nel contesto" in un "problema matematico", cioè gestibile attraverso strumenti, concetti e procedure proprie della matematica.

Un modello può essere definito come un «sistema di strutture concettuali usate per costruire, interpretare e descrivere matematicamente una situazione» (Richardson, 2004, p. viii, tradotto dagli autori). La *modellizzazione* prevede dunque da parte dell'allievo l'individuazione della struttura matematica all'interno del problema posto (English & Watters, 2004a). Il processo di *modellizzazione*, infatti, non è una mera semplificazione della realtà, quanto un'immagine fedele di una sua qualche componente; il modello matematico crea e struttura una parte di realtà, a dipendenza delle conoscenze, delle intenzioni e degli interessi del solutore (Blum & Niss, 1991). Esso è dunque un sistema concettuale che generalmente è espresso attraverso una varietà di rappresentazioni, che possono coinvolgere simboli scritti, linguaggio naturale, diagrammi o grafici, relazioni, schemi, regolarità. Il suo scopo è di costruire, descrivere o spiegare altri sistemi (Lesh & Doerr, 2003). L'aspetto centrale nella costruzione di un modello è la possibilità e capacità di riutilizzare e generalizzare tale modello in una classe di situazioni in cui è applicabile. La peculiarità dei modelli matematici (a differenza di altre categorie di modelli) è quella di focalizzarsi sulle caratteristiche strutturali del problema che lo descrivono, piuttosto che su caratteristiche fisiche, biologiche, o artistiche. Secondo Quarteroni (1998):

> «Il modello non esprime necessariamente l'intima e reale essenza del problema (…), ma deve fornire una sintesi utile. I matematici hanno un ruolo particolare in tale contesto. Essi sanno vedere e capire la natura intrinseca di un problema, determinare quali caratteristiche sono rilevanti e quali non lo sono, e, di conseguenza sviluppare una rappresentazione matematica che contiene l'essenza del problema stesso».
>
> (p. 25)

Ritornando al ciclo proposto nella Figura 1: il primo processo di *formulazione* si riferisce alla capacità degli studenti di fornire una struttura matematica a un problema presentato in forma contestualizzata. Per farlo, è richiesta la capacità di estrapolare le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema. Dunque è necessaria una comprensione profonda della situazione e una decodifica delle informazioni trasmesse dal testo (anche quelle sottintese) espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.). È richiesto un pro-

cesso di traslazione da una situazione reale a un ambito matematico che permette di conferire al problema una struttura. Questo presuppone la capacità di saper estrapolare informazioni da varie rappresentazioni espresse in diversi registri semiotici (Duval, 1993).
Il processo di *formulazione* delle situazioni in forma matematica comprende diverse attività, quali ad esempio quelle riportate dall'OECD (2013, p. 28, tradotto dagli autori):

«• identificazione degli aspetti matematici di un problema inserito in un contesto reale e identificazione delle variabili significative;
• riconoscimento della struttura matematica (ivi compresi regolarità, relazioni e modelli o pattern) nei problemi o nelle situazioni;
• semplificazione di una situazione o di un problema al fine di renderli gestibili mediante un'analisi matematica;
• identificazione delle limitazioni e delle ipotesi alla base della modellizzazione matematica e delle semplificazioni desunte dal contesto;
• rappresentazione di una situazione in forma matematica, attraverso l'utilizzo di variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati;
• rappresentazione di un problema in modo diverso, ivi comprese la sua organizzazione in base a concetti matematici e la formulazione di ipotesi appropriate;
• comprensione e spiegazione delle relazioni esistenti tra il linguaggio specifico del con testo di un problema e il linguaggio simbolico e formale necessario per rappresentarlo in forma matematica;
• traduzione di un problema in un linguaggio o in una rappresentazione di carattere matematico;
• riconoscimento degli aspetti di un problema che corrispondono a problemi, concetti, fatti o procedimenti matematici noti;
• utilizzo della tecnologia (ad es. un foglio elettronico o le funzioni di una calcolatrice grafica) per tracciare una relazione matematica inerente al problema contestualizzato».

Una volta ottenuto il "problema matematico" si procede poi con l'*utilizzare* strategie risolutive già note o elaborarne di nuove, applicando, ad esempio, fatti, regole, algoritmi; manipolando numeri, informazioni, dati grafici, espressioni o equazioni, costruzioni geometriche; utilizzando diverse rappresentazioni e passando dall'una all'altra per arrivare alla soluzione.[2] Questo secondo processo avviene interamente nel mondo della matematica e utilizza il suo linguaggio e i suoi metodi.
Nello specifico, questo processo di utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici comprende diverse attività, quali ad esempio quelle riportate dall'OECD (2013, p. 29, tradotto dagli autori):

«• elaborazione e attuazione di strategie per trovare soluzioni matematiche;
• utilizzo di strumenti matematici, tecnologia compresa, che possano essere utili per trovare soluzioni esatte o approssimate;
• applicazione di fatti, regole, strutture e algoritmi matematici nel cercare una soluzione;
• manipolazione di numeri, informazioni e dati grafici e statistici, espressioni ed equazioni algebriche e rappresentazioni geometriche;
• creazione di diagrammi, grafici e costruzioni matematiche da cui estrarre informazioni utili;

[2] Nei primi due processi del ciclo si può individuare anche il processo *Esplorare e provare* previsto dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015).

- utilizzo di diverse rappresentazioni, e passaggio da una all'altra, durante il processo per arrivare alla soluzione;
- esecuzione di generalizzazioni sulla base dei risultati dell'applicazione di procedimenti matematici per giungere alla soluzione;
- riflessione sulle argomentazioni matematiche con spiegazione e giustificazione dei risultati matematici».

La determinazione di una (o più) soluzioni non conclude il ciclo; esso infatti prevede il passaggio attraverso due ulteriori processi, nonostante nella pratica didattica spesso si tenda a sottovalutare il ruolo dell'analisi da effettuare dopo aver individuato le soluzioni di una situazione.
Il terzo processo del ciclo (*interpretare*) comporta la capacità degli studenti di riflettere su procedimenti, soluzioni o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto del problema iniziale, richiedendo dunque una comprensione profonda del significato matematico di quanto ottenuto. In questo processo gli allievi sono particolarmente sollecitati a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni relative al problema di partenza, appartenente ad un contesto di realtà, riflettendo sia sul processo di modellizzazione sia sui risultati ottenuti.[3]
Nel quarto processo (*valutare*) si richiede la capacità di valutare l'accettabilità o meno dei processi risolutivi e delle soluzioni trovate in base alle condizioni reali poste dal problema. Questo comporta una riflessione critica sugli eventuali limiti o punti di forza del modello matematico utilizzato, sul perché è stata ottenuta una o più soluzioni, sul loro senso nel contesto specifico della situazione-problema, oltre a una considerazione più ampia di come il mondo reale influisca sul modello matematico scelto.
L'interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici comporta ancora una volta da parte del solutore diverse attività, quali ad esempio quelle riportate dall'OECD (2013, p. 29, tradotto dagli autori):

«• interpretazione di un risultato matematico riportato nel contesto reale;
- valutazione della plausibilità di una soluzione matematica nel contesto di un problema reale;
- comprensione del modo in cui il mondo reale influisce sui risultati e sui calcoli di un procedimento o modello matematico al fine di formulare giudizi contestuali su come dovrebbero essere corretti o applicati i risultati;
- spiegazione del perché un risultato o una conclusione matematica abbia, o non abbia, senso nel contesto specifico di un dato problema;
- comprensione della portata e dei limiti dei concetti e delle soluzioni matematiche;
- critica e individuazione dei limiti del modello utilizzato per risolvere il problema».

2.1.3. La matematizzazione orizzontale e verticale

Nel ciclo presentato nel paragrafo precedente, è possibile evidenziare due forme di matematizzazione individuate da Treffers (1987) e, in seguito, da Freudenthal (1991): una *orizzontale* e una *verticale*. La seguente citazione spiega questa distinzione:

«Così, attraverso un approccio empirico - osservazione, sperimentazione, ragionamento induttivo - il problema viene trasformato in modo tale che possa essere affrontato da strumenti prettamente matematici. Il tentativo di schematizzare matematicamente il

[3] Questo processo del ciclo è particolarmente legato a due di quelli previsti dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015): *Interpretare e riflettere sui risultati* e *Comunicare e argomentare.*

problema è indicato dal termine matematizzazione "orizzontale". (...) Le attività che seguono e che sono legate al processo matematico, alla soluzione del problema, alla generalizzazione della soluzione e all'ulteriore formalizzazione, possono essere descritte come matematizzazione "verticale"».

(Treffers, 1987, p. 71, tradotto dagli autori)

Come sostiene De Lange (1987), in tutte le fasi dell'attività matematica entrambe le matematizzazioni si completano a vicenda.
Nella definizione iniziale di matematizzazione orizzontale si pone l'accento sul passaggio dal mondo reale a quello matematico, mentre si definisce il processo di matematizzazione verticale solo all'interno del mondo matematico. Tuttavia in Jupri e Drijvers (2016) viene fornita una lettura più ampia di queste due tipologie, che può essere applicata al ciclo proposto da PISA (OECD, 2013): la matematizzazione orizzontale può essere interpretata come il passaggio e la comunicazione tra i due mondi (reale e matematico), quella verticale invece come l'elaborazione di strategie e procedure all'interno dello stesso mondo (Figura 2).

Figura 2. Matematizzazione orizzontale e verticale nel ciclo della matematizzazione

La matematizzazione orizzontale richiede sia una traduzione in linguaggio matematico della situazione reale attraverso rappresentazioni semiotiche (*formulare*, dal mondo reale al mondo matematico), sia un'analisi e interpretazione dei risultati matematici ottenuti nel contesto della situazione reale (*interpretare*, dal mondo matematico al mondo reale).
La matematizzazione verticale richiede sia una riorganizzazione e ricostruzione del problema all'interno della matematica, attraverso la manipolazione di modelli matematici, l'utilizzo di procedure e concetti, riconoscendo schemi ricorrenti e strategie da usare con metodi noti o da esplorare (*utilizzare*, all'interno del mondo matematico), sia la verifica delle condizioni del problema, la generalizzazione delle procedure risolutive e il riconoscimento di una possibile applicazione di tali procedure in problemi simili (*valutare*, all'interno del mondo reale) (Jupri & Drijvers, 2016).

L'esplicitazione di queste fasi permette di analizzare in modo più mirato e consapevole le competenze degli allievi e di prevedere eventuali azioni di intervento specifiche in caso di difficoltà. In tutte le fasi dell'attività matematica, le due tipologie si interfacciano e si completano a vicenda, ma non allo stesso modo per tutti gli allievi. Il processo di matematizzazione intrapreso è personale e può prevedere strade differenti a seconda della percezione della situazione reale da parte dello studente, delle sue abilità come solutore e delle competenze raggiunte. A volte nel processo di risoluzione vengono previsti più "passaggi verticali" e meno "passaggi orizzontali" o viceversa. (De Lange, 1987).
Non sempre tutte le fasi sono richieste nella risoluzione di un problema. Secondo l'OECD (2013) esistono diversi livelli di complessità di un problema in relazione alla richiesta o esigenza di *matematizzazione*:

> «Taluni compiti non richiedono matematizzazione - o perché il problema è posto già in forma sufficientemente matematica, o perché la relazione tra il modello e la situazione che rappresenta non è necessaria per risolvere il problema. L'esigenza di matematizzazione compare nella sua forma meno complessa allorché chi deve risolvere il problema deve interpretare e dedurre direttamente da un dato modello, o traslare direttamente una situazione in forma matematica (p. es. strutturare e concettualizzare la situazione in modo pertinente, identificare e selezionare le relative variabili, raccogliere misurazioni pertinenti e/o fare dei diagrammi). L'esigenza di matematizzazione aumenta in presenza di ulteriori requisiti di modifica o utilizzo di un dato modello per captare l'evoluzione delle condizioni o interpretare relazioni implicite; scegliere un modello familiare entro vincoli chiari ben delimitati; o creare un modello in cui variabili, relazioni e vincoli sono espliciti e chiari. A un livello ulteriore, l'esigenza di matematizzazione è associata alla necessità di creare o interpretare un modello in una situazione che richiede di identificare o definire numerosi presupposti, variabili, relazioni e vincoli, e di verificare che tale modello soddisfi i requisiti del compito; oppure quando si tratta di valutare o raffrontare modelli».
>
> (OECD, 2013, p. 44, tradotto dagli autori)

2.2. Il processo *Matematizzare e modellizzare* nella risoluzione di problemi

Da quanto discusso fino ad ora emerge come il processo *Matematizzare e modellizzare* abbia profondi legami con l'attività di risoluzione di problemi. Freudenthal (1991) mette in relazione i due aspetti, identificando la matematizzazione come una parte interna alla risoluzione dei problemi e sottolineando quanto sia importante collegare la matematica con i problemi verbali reali. Seguendo l'interpretazione di Freudenthal, Schoenfeld (1992) afferma che la matematizzazione è necessaria alla risoluzione dei problemi per sviluppare processi ad alto livello che influenzino le competenze matematiche degli studenti.
L'attività legata alla risoluzione di problemi è molto complessa e sono diverse le teorie e interpretazioni che si trovano in letteratura (per un approfondimento si veda D'Amore, 2014). In generale, si tratta di un'attività in cui intervengono esperienze e conoscenze precedenti, rielaborate attraverso le informazioni fornite e l'intuizione allo scopo di determinare la soluzione, il risultato del problema, per il quale la procedura non è direttamente conosciuta (Charles, Lester, & O' Daffer, 1987). L'attività di risoluzione di problemi va oltre l'apprendimento di regole o la raccolta di esemplificazioni di strategie. In D'Amore e Fandiño Pinilla (2006) gli autori affermano:

> «È vero che, in prima istanza, chi risolve tenta di applicare regole (norme, esperienze, ...) o procedimenti (meglio se vincenti) precedentemente esperiti con successo; ma è anche vero che, se la situazione problematica è opportuna, il soggetto potrebbe non trovare una situazione analoga o identica ad una precedente. Egli può invece trovare una particolare combinazione di regole (norme, esperienze, ...) del tutto nuova e che andrà ad arricchire il campo delle esperienze cui far ricorso in futuro. Insomma: risolvendo il problema, il soggetto ha appreso».
>
> (p. 653)

Da questo punto di vista, celebre è la frase di uno dei più grandi studiosi della teoria del problem solving, George Polya (1945):

> «Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere i problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».
>
> (citato in D'Amore, 1999, p. 288)

Oppure quella di Karl Duncker (1935) basata esplicitamente sull'obiettivo: «Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla» (citato in D'Amore, 1999, p. 289).

Dal punto di vista didattico, è utile riflettere sulla distinzione tra *esercizio e problema* ormai condivisa in didattica della matematica:

> «Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale situazione nella quale l'alunno o la classe si trova, ... Ma gli esercizi possono essere risolti utilizzando regole già

> apprese ed in via di consolidamento e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica immediata. Mentre i problemi coinvolgono o l'uso di più regole (alcune anche in via di esplicitazione proprio in quell'occasione) o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso».
>
> (D'Amore, 2014, p. 19)

Si ha quindi un *esercizio* quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare *regole e procedure già apprese*, anche se ancora in corso di consolidamento. L'attività legata alla sua risoluzione non è creativa e comporta la mobilitazione di competenze già acquisite, senza alcun atto inventivo.

Si ha invece un *problema* quando una o più regole o una o più procedure *non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore*; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione. Spesso è richiesto un atto creativo da parte del risolutore nell'individuare la strategia più appropriata; lo studente, sulla base delle proprie competenze, deve organizzare per ideare ed applicare una strategia che non ha mai sperimentato prima.
Il seguente schema riassume la distinzione tra i due concetti:

Esecizio	**Problema**
Situazione conosciuta	Situazione inedita
Metodo già acquisito	Metodo sconosciuto
Applicazione, riproduzione Esecuzione meccanica	Creazione, produzione Processo da inventare
Consolidamento di un sapere Allenamento	Acquisizione di un sapere
Strumento per verificare conoscenze e abilità	Oggetto di insegnamento

Tabella 3. Differenze tra esercizio e problema

All'interno della stessa classe, un testo fornito dal docente può quindi dare luogo a un esercizio o a un problema in allievi diversi, a dipendenza di vari fattori: competenze, fattori affettivi o motivazionali, contratto didattico instaurato in classe ecc.
Come affermava Polya (1945), l'insegnante ha dunque un ruolo fondamentale nel processo di insegnamento-apprendimento:

> «(...) Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle loro conoscenze e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale».
>
> (p. 5)

Importante è anche chiarire che cos'è la *situazione problema o problematica* per metterla in relazione con il problema e l'esercizio. Vi sono diverse interpretazioni, ne riportiamo alcune: per Boero (1986) la situazione problema è «il significato del testo» (mentre il testo è «un sistema di segni» che la codifica), per Borasi (1984), la situazione problema è «il contesto in cui ha senso il problema posto», per D'Amore (2014, p. 20):

> «situazione problematica è il sistema delle competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto da un testo e dal suo significato (semantica), all'interno delle esperienze del singolo bambino (il sistema è specifico per quel dato problema). Per cui, la situazione problematica recupererebbe aspetti semantici, pragmatici ed esperienziali».

Castoldi (2011) definisce la situazione-problema:

> «come un problema da risolvere in un dato contesto operativo, all'interno dei vincoli e delle risorse poste dal contesto stesso; la stessa espressione abbina il riferimento a una situazione problematica con il richiamo a un contesto concreto nel quale collocare il problema stesso».
>
> (p. 186)

Nell'analisi puntuale di Polya (1945) circa la risoluzione di un problema sono identificate quattro fasi principali nell'azione dell'allievo:
1) la comprensione del problema, per cui è necessario conoscere chiaramente quanto richiesto;
2) la compilazione di un piano che prevede la scoperta dei legami che intercedono fra le varie informazioni;
3) lo sviluppo di un piano che comporta l'applicazione di regole, algoritmi e procedure;
4) la verifica del risultato, per cui si richiede di esaminare attentamente il risultato ottenuto e procedere alla verifica e discussione.

Quest'ultimo approccio prevede dunque un ciclo iterativo di fasi che si ripetono fino all'ottenimento della soluzione e nel quale l'allievo si muove alla ricerca della soluzione. Riscontriamo le stesse azioni nel ciclo della matematizzazione analizzato precedentemente, come riportato nel seguente schema.

Fasi nel ciclo della matematizzazione	**Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya**
Formulare	Comprendere il problema Compilare un piano
Utilizzare	Sviluppare il piano
Interpretare Valutare	Verificare il risultato

Tabella 4. Fasi nel ciclo della matematizzazione e fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya

Come già evidenziato, il passaggio da una fase all'altra non avviene per tutti gli allievi allo stesso modo, c'è chi si sofferma maggiormente su un processo, chi su un altro.
Al fine di condurre un'analisi specifica del comportamento di un allievo di fronte alla risoluzione di un problema, Schoenfeld (1983) propone di suddividere in "episodi" il comportamento risolutivo, caratterizzandoli nel modo seguente:

1. Lettura
2. Analisi
3. Esplorazione
4. Pianificazione
5. Implementazione
6. Verifica
7. Transizione

In questi episodi si riconoscono facilmente le quattro fasi di Polya (Zan, 2012).

Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya	**Episodi nella risoluzione di un problema secondo Schoenfeld**
Comprensione del problema	Lettura Analisi Esplorazione
Compilazione di un piano	Pianificazione
Sviluppo del piano	Implementazione
Verifica del risultato	Verifica Transizione

Tabella 5. Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya ed episodi nella risoluzione di un problema secondo Schoenfeld

Le differenze maggiori risiedono nella distinzione tra Analisi e Esplorazione, ma soprattutto nell'introduzione dell'episodio Transizione, che consiste in controlli e valutazioni che il soggetto compie durante il processo risolutivo.
L'interessante ricerca condotta da Schoenfeld nel 1992 - basata sull'osservazione del comportamento di due soggetti durante la risoluzione di problemi - mette in evidenza una differenza notevole nella quantità e nella qualità delle decisioni strategiche. Nelle Figure 3 e 4 sono riportati i diagrammi che testimoniamo tale differenza. In particolare i "cattivi solutori" di problemi (Figura 3) in generale dedicano poco tempo alla comprensione del testo, riservandolo tutto all'esplorazione, cioè a fare diversi tentativi. I "bravi solutori" (Figura 4), al contrario, utilizzano in modo più efficace il tempo, spendendo parte di questo a pensare e organizzare le informazioni. Inoltre, l'esplorazione consapevole di diversi approcci risolutivi fa sì che il "bravo solutore" passi da un "episodio" all'altro in funzione della bontà o meno della soluzione trovata.

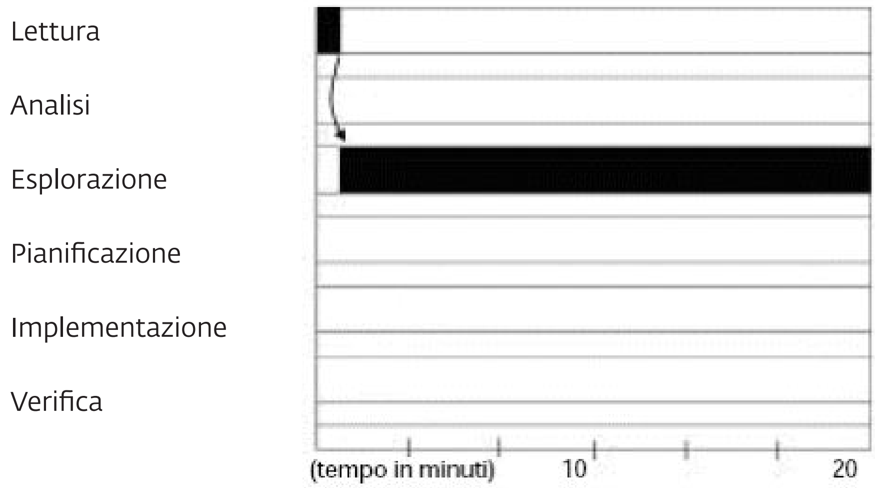


Figura 3. Grafico della linea temporale di un tipico allievo che risolve un problema (tratto da Zan, 2012)

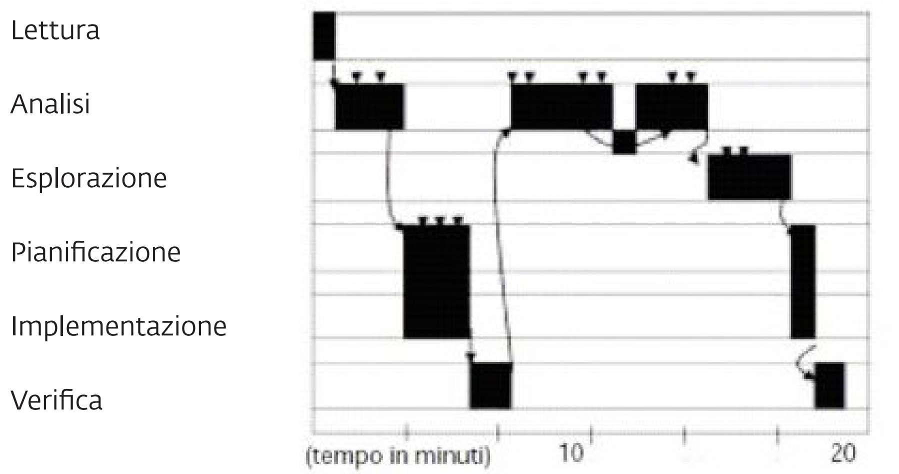


Figura 4. Grafico della linea temporale di un matematico che sta lavorando ad un problema complesso (tratto da Zan, 2012)

Anche in Lesh (2006) e in Sriraman e Lesh (2006) viene evidenziato come l'attività di risoluzione dei problemi includa un certo numero di cicli interattivi e di passaggi da una fase all'altra, nei quali gli allievi si muovono per arrivare alla soluzione, tornando indietro per riflettere sulle ipotesi formulate, affinando il loro risultato e procedendo attraverso diverse strategie. Non si tratta dunque di un approccio lineare che dai dati porta direttamente al risultato, bensì di un percorso circolare, riconducibile a quello illustrato sulla matematizzazione.
Di fatto un "buon solutore" si differenzia non per il maggior numero di conoscenze messe in atto, quanto per la capacità di gestirle meglio. Come afferma (Zan, 2012) per ciò che concerne un "buon risolutore":

> «non è più considerato tale chi ha adeguate conoscenze nel dominio di conoscenze specifiche cui il programma fa riferimento, o possiede un adeguato repertorio di euristiche (come suggerito da Polya), ma chi sa organizzare e gestire al meglio tali risorse in vista dell'obiettivo dato, mettendo in atto efficaci e continui processi di controllo e autoregolazione».
>
> (p. 163)

Ciò si collega all'importanza di sviluppare negli allievi competenze di tipo trasversale. Risulta ad esempio molto interessante analizzare i processi decisionali che portano un allievo ad adottare una strategia piuttosto che un'altra nella risoluzione di un problema.
Sempre secondo Zan (2012): «(...) proprio la necessità di prendere decisioni differenzia i problemi dalle situazioni di routine (quelle che abbiamo chiamato esercizi), in cui è possibile attivare un comportamento automatico» (p. 160).
Conseguentemente, i comportamenti fallimentari nella risoluzione di problemi non dipendono solo da assenza di conoscenze, ma anche dalla scarsa efficienza dei processi di controllo attivati, o dalla loro mancata attivazione. In quest'ottica diventa importante porsi la domanda:

> «da cosa sono influenzati i processi di controllo? In particolare, come possiamo spiegare la mancata attivazione di tali processi? Da cosa dipende la loro scarsa efficienza?... carenze a livello di consapevolezza spiegano allora fallimenti dovuti al fatto che il soggetto non riconosce la situazione come problematica, ed attiva quindi comportamenti automatici: questo succede quando un allievo risponde alle domande dell'insegnante immediatamente, senza riflettere; quando un allievo comincia a svolgere un esercizio imbarcandosi subito in calcoli».
>
> (Zan, 2012, pp. 164-165)

Analogamente, una scarsa consapevolezza delle proprie risorse comporta un'errata valutazione del tempo necessario per svolgere un certo compito. Se l'insegnante ponesse particolare attenzione a questi aspetti, focalizzando il proprio insegnamento non solo sulle risorse cognitive, ma anche sulla loro gestione nell'attivazione di processi decisionali, permetterebbe un migliore recupero e potenziamento degli allievi nella risoluzione di problemi.

Come ha evidenziato la ricerca in didattica della matematica, purtroppo la tradizione scolastica è spesso incentrata sulla pratica degli esercizi, limitata all'esecuzione di procedure e calcoli, e non sulla stimolante attività di risoluzione di problemi che consente di lavorare adeguatamente sulle competenze in matematica (Lesh e Zawojewski, 2007). Inoltre, come evidenziato da Schoenfeld (1992), una caratteristica centrale nell'insegnamento tradizionale della matematica in molti paesi è la risoluzione dei cosiddetti problemi verbali, i quali rappresentano solitamente una forma ricontestualizzata di una descrizione decontestualizzata di situazioni prese dalla quotidianità che hanno uno specifico obiettivo, ossia quello di allenare l'utilizzo di alcune operazioni matematiche, come la sottrazione o l'addizione (Wyndhamm & Saljo, 1997). Questa pratica è ben lontana dalle attività di problem solving, come proposte da Polya (1945, 1973) e da Schoenfeld (1992), nelle quali l'obiettivo non è eseguire calcoli, bensì tradurre una situazione reale in termini matematici e, successivamente, pensare ad una possibile strategia che permetta di arrivare alla soluzione. La mancanza di collegamento tra la pratica didattica tradizionale, incentrata sui problemi verbali, e il mondo reale è evidenziata da diversi studi specifici (English, 2006; Lesh & Zawojewski, 2007), che sottolineano come l'approccio ai problemi verbali sia molto distante dall'idea di matematizzazione e modellizzazione che, per i motivi illustrati sopra, sarebbe importante sviluppare. Per questo Lesh e Doerr (2003) raccomandano agli insegnanti una maggiore presenza di problemi legati ad un contesto reale, nei quali gli allievi possano sviluppare modelli, applicare e raffinare approcci noti e comunicare le soluzioni.

Se da un lato è chiaro che i quesiti proposti dalle prove standardizzate di matematica riguardano problemi verbali che non possono essere legati a veri e propri contesti reali, è ancora più evidente come sia fondamentale focalizzare maggiormente la didattica in classe su attività che mirino a lavorare in modo profondo e completo su competenze legate alla matematizzazione e modellizzazione, rispetto ad abilità di calcolo o esclusivi contenuti o esercizi. Come afferma Wheeler (1982, tradotto dagli autori): «È più utile sapere come matematizzare piuttosto che conoscere tanta matematica» (p. 45).

2.3. Difficoltà nel processo *Matematizzare e modellizzare*

L'esplicitazione delle varie fasi del processo di matematizzazione permette di osservare in modo più mirato e consapevole le difficoltà degli allievi e prevedere azioni di recupero specifiche.
In letteratura sono menzionate numerose ricerche che si sono concentrate sull'analisi delle difficoltà degli allievi nel processo *Matematizzare e modellizzare*, focalizzandosi su una delle varie fasi descritte nel paragrafo 2.1.2. e su livelli scolastici differenti (Jupri, Drijvers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014; Jupri, Drijvers, 2016; Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, Doorman & Robitzsch, 2014; Bolondi, Censi, & Sbaragli, 2013; English & Watters, 2004b; Zan, 2007a; 2016; D'Amore, 2014). Alcuni di questi lavori (Wijaya et al., 2014; Bolondi et al., 2013) si soffermano sull'analisi degli errori e delle difficoltà registrate nelle diverse fasi di risoluzione di quesiti tratti da prove standardizzate. I risultati di questi test stimolano, infatti, studi mirati sulle performance degli allievi attraverso l'analisi delle loro strategie risolutive adottate. Anche nel presente rapporto vengono riportati i punti di forza e gli ostacoli incontrati dagli allievi a risolvere quesiti di prove standardizzate. In particolare, come già affermato in precedenza, l'analisi degli errori degli allievi è una potente risorsa per diagnosticare le difficoltà e individuarne le cause, perché essi forniscono l'accesso al ragionamento degli allievi (Brodie, 2014).
In analogia con quanto sviluppato da Newman (1977) per la risoluzione di problemi verbali (Newman Error Analysis), e ripreso da Clements (1980), possiamo inquadrare e categorizzare le difficoltà degli allievi nel processo *Matematizzare e modellizzare*, mostrando l'associazione tra le categorie di errori elaborate da Newman, le fasi del ciclo di matematizzazione e le fasi di Polya (Wijaya et al., 2014).

<table>
<tr><th>Categorie di errori secondo Newman</th><th>Fasi del ciclo di matematizzazione</th><th>Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya</th></tr>
<tr><td>Errori nel semplice riconoscimento di parole e simboli</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Errori nella comprensione della situazione</td><td rowspan="2">Formulazione</td><td rowspan="2">Comprendere il problema
Compilare un piano</td></tr>
<tr><td>Errori nella trasformazione da un problema verbale ad un appropriato problema matematico</td></tr>
<tr><td>Errori nell'esecuzione delle procedure matematiche</td><td>Utilizzare</td><td>Sviluppare il piano</td></tr>
<tr><td>Errori nella rappresentazione della soluzione matematica in una forma accettabile</td><td>Interpretare
Valutare</td><td>Verificare il risultato</td></tr>
</table>

Analizziamo nel dettaglio ciascun tipo di errore proposto da Newman (1977).

• *Significato delle parole*. In letteratura è ormai noto come molte difficoltà incontrate in ambito matematico derivino da carenze linguistiche legate in particolare al significato delle parole, il cosiddetto *dizionario* (Ferrari, 2003; Fornara & Sbaragli 2013; Zan, 2016; Franchini, Lemmo, & Sbaragli, 2017); impedimenti probabilmente accentuati anche dalla presenza di una forte componente di allievi allofoni, che spesso sono di culture e vissuti assai diversi. In particolare, per risolvere situazioni lo studente dovrebbe conoscere il significato delle parole della lingua italiana (specialistiche o comuni) presenti nel testo e avere un'adeguata *enciclopedia*, ossia la conoscenza delle cose del mondo, che è necessario padroneggiare anche per cogliere i numerosi impliciti presenti nel testo (per approfondimenti rimandiamo a Zan, 2007b). Si tratta di una questione delicata poiché, come sostiene Zan (2016, p. 50):

> «(...) di fronte ad un testo scritto come problema, il fatto che i bambini non conoscano il significato corretto delle parole utilizzate non implica necessariamente che ne siano consapevoli, e che interrompano il processo di interpretazione in assenza di tali informazioni: di fronte a parole per loro sconosciute i bambini a volte riadattano quello che sentono in una costruzione per loro sensata».

In un precedente lavoro, D'Amore (1997b) mette in evidenza lo stesso aspetto, tramite la richiesta di risolvere un problema nel quale vi era una parola inventata. A questa richiesta i bambini tendono a re-interpretare la parola sconosciuta, dandole connotati semantici attendibili rispetto alla realtà descritta dal testo.

> «È come se scattasse una clausola del contratto didattico secondo la quale non può accadere che l'insegnante inserisca nel testo una parola inesistente. Si tratta di una clausola appartenente al gruppo che amo definire "fiducia nell›insegnante". È piuttosto plausibile, per il bambino, che si tratti di una parola che lui non conosce, ma che certamente significa qualche cosa; il che sembra non impedire affatto la risoluzione».
>
> (p. 250)

Come sostiene Zan (2007b, p. 746), «naturalmente se chi legge si rende conto di non conoscere il significato di una parola, può chiederlo o cercarlo, o sospendere l'interpretazione del testo. Ma non è detto che questo succeda».

Anche in una ricerca effettuata all'interno del progetto *Italmatica* da Fornara e Sbaragli (2013; 2016), sono evidenziate le difficoltà di comprensione del testo da parte dei bambini di scuola elementare, derivanti da aspetti linguistici, e gli erronei atteggiamenti assunti per risolvere problemi. La ricerca era volta a indagare le strategie attuate dai bambini per risolvere due problemi scolastici standard, molto semplici dal punto di vista della *struttura matematica* (processi risolutivi possibili, tipo di dati numerici ecc.), ma più complessi per quanto concerne la *struttura narrativa,* su cui si basa il processo di comprensione – o rappresentazione – del problema. In particolare, la risoluzione era vincolata alla corretta interpretazione del significato di alcune parole, ossia, ad una padronanza del dizionario, al quale si ricollegano le conoscenze enciclopediche. I dati raccolti hanno rilevato l'erroneo atteggiamento degli allievi nel tentare di trovare una soluzione anche quando la comprensione del testo era lacunosa (verificata tramite la richiesta di scrivere il significato di alcune parole), dimostrando così che è più forte l'esigenza di fornire al docente un risultato, piuttosto che ammettere di non possedere di tutte le conoscenze linguistico-enciclopediche per soddisfare la richiesta del problema. Infatti, vari allievi erano consapevoli di non conoscere il significato di alcune parole presenti nel testo (esplicitandolo con frasi come "Non so il significato"), ma ciò non li ha spinti a interrompere il processo di risoluzione. In una successiva sperimentazione effettuata con bambini di scuola elementare (Fornara & Sbaragli, 2017) si è voluta "rompere" quest'abitudine stereotipata di risoluzione dei problemi di matematica, basata sulla convinzione che, dopo la somministrazione di un testo di un problema, debba seguire immediatamente la sua risoluzione, anche in mancanza di informazioni utili allo scopo. In particolare, si sono voluti sensibilizzare gli allievi sull'importanza di una riflessione sul significato delle parole presenti nel testo e dell'intera situazione, mostrando loro la rilevanza di esse per la risoluzione di un problema. Tale sperimentazione ha portato a significative considerazioni da parte degli allievi e a un miglioramento nella risoluzione dei problemi. Il linguaggio naturale può quindi diventare un "intralcio supplementare" (e inevitabile) nell'interpretazione di un testo di matematica, in quanto, se non adeguatamente padroneggiato, rischia di essere uno dei più pervasivi ostacoli alla sua risoluzione.

• *Comprensione della situazione*. Difficoltà nel capire il significato del problema e rappresentarsi correttamente la situazione descritta nel testo. Diverse ricerche in questo ambito (Mayer (1982); De Corte & Verschaffel (1985); Laborde (1995); D'Amore (1996a; 1996b, 1997a, 2014); Verschaffel, Greer, & De Corte (2000); Ferrari (2004); Zan (2007a; 2007b); Fornara & Sbaragli (2013) hanno mostrato come le difficoltà osservate in relazione al processo di risoluzione dei problemi verbali possono essere causate da un'inadeguata comprensione e interpretazione del testo con cui il compito è presentato, in particolare dall'influenza delle variabili redazionali del testo (lessicali, sintattiche, testuali) sul processo risolutivo di un problema da parte degli studenti. Gli insegnanti stessi evidenziano che spesso il bambino legge il testo ma non lo capisce a fondo, oppure non lo coglie in un tutto unico. Come afferma D'Amore (2014, p. 132 e p. 172):

> «Spesso il testo non è espresso nella lingua che il bambino si aspetta o in una lingua sua (...) e quindi il bambino deve "tradurre" semanticamente da una lingua adulta a una lingua propria, capire il senso della richiesta, per farsi un'immagine di quel che la situazione problematica propone. (...) una carente o distorta rappresentazione mentale del problema è una delle più frequenti cause di fallimento ed è dunque qui che occorre intervenire con efficacia e con intelligenza. (...) Il bambino può manifestare difficoltà nella prima fase dei processi di simbolizzazione: dal testo all'immagine mentale evocata nel seguito del testo; [oppure] può immaginare situazioni che provocano conflitti tra l'immagine stessa e le abilità già possedute».

Spesso sembra mancare una effettiva ricostruzione della situazione problematica (Zan, 2011). Secondo l'autrice, tale mancanza deriva generalmente da due fenomeni: la difficoltà di comprensione e la rinuncia alla comprensione.
Tra le diverse difficoltà di comprensione da parte degli allievi, ve ne sono alcune legate al senso stesso del problema, ossia riguardanti il tipo di situazione in cui il problema matematico è contestualizzato e il legame fra la situazione descritta e la domanda posta (Zan, 2016).
Secondo Zan (2012), la rappresentazione della situazione descritta nello stimolo spesso viene aggirata a favore di "comportamenti patologici" a lungo evidenziati dalla ricerca in didattica della matematica, come la *lettura selettiva del testo* e cioè orientata alla ricerca di dati numerici da combinare e di parole chiave che suggeriscano il modo di combinarli, la trascrizione del risultato di un algoritmo a prescindere dal contesto di partenza, che testimoniano «una rinuncia

a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo» (Zan, 2011, p. 18). Come sostiene Zan (2012, p. 437):

> «L'interpretazione di questo fenomeno è complessa, e mette in gioco diversi fattori che interagiscono (per una sintesi si veda Verschaffel et al., 2000): gli stereotipi dei problemi verbali standard, le norme implicite ed esplicite che regolano l'attività matematica in classe (il cosiddetto contratto didattico), le convinzioni che i bambini costruiscono interpretando l'attività con i problemi».

• *Trasformazione del testo in un modello matematico*. Incapacità di tradurre la situazione reale in un modello matematico e la difficoltà a stabilire collegamenti tra il linguaggio naturale e quelli specifici della matematica: verbale (dove si usano termini tratti dal linguaggio naturale, spesso con significati disciplinari diversi, o tratti in modo specifico dal mondo matematico), grafico, algebrico, simbolico, logico ecc. Tra le maggiori difficoltà che gli studenti incontrano vi è l'incapacità di gestire le diverse rappresentazioni e di passare dall'una all'altra nella fase di modellizzazione (Duval, 1993; D'Amore, 2006). Infatti: «molti allievi non sono in difficoltà con la o nella matematica, ma nella (complessa) gestione dell'apparato semiotico che l'insegnamento/apprendimento della matematica necessariamente comporta» (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013, p. 113).
D'altra parte l'attività matematica è inseparabile dalla produzione e dalla trasformazione di rappresentazioni semiotiche in altre rappresentazioni semiotiche nello stesso registro o in registri semiotici differenti. Infatti:

> «un sintomo importante dell'emergere della comprensione di un problema è la capacità di rappresentarlo in un certo numero di modi diversi e di intravvederne la soluzione da diversi punti di vista; un'unica rigida rappresentazione solitamente non basta».
> (Gardner, 1993, p. 28)

Nella risoluzione dei problemi le trasformazioni semiotiche hanno un ruolo di assoluta importanza e già semplici problemi matematici implicano attività di conversione semiotica. Da questo punto di vista, è interessante l'analisi effettuata da Duval (2013), il quale asserisce che nella maggior parte dei casi le difficoltà che presentano gli allievi nella risoluzione di un problema derivano dal mancato riconoscimento di una corrispondenza fra le *unità di contenuto* dell'enunciato del problema (parole, espressioni, simboli, unità figurali) e quelle di un'altra rappresentazione (nelle stesso registro o in un registro differente) necessaria per la risoluzione del problema. Iori (2014) precisa:

> «Si dovrebbe dunque parlare non di una insufficiente costruzione cognitiva di oggetti (o concetti) matematici, ma di fenomeni di congruenza o di non congruenza tra i contenuti di rappresentazioni semiotiche che si riferiscono allo stesso oggetto oppure a oggetti differenti».
> (p. 171)

Da un punto di vista didattico, Fandiño Pinilla (2008) suggerisce di non dare per scontate le trasformazioni semiotiche, bensì di far notare agli allievi le molteplici rappresentazioni di un oggetto matematico e farli ragionare esplicitamente su questi aspetti fin dai primi anni di scolarità. Nonostante la ricerca dimostri che anche i bambini di scuola elementare possano impegnarsi in situazioni complesse con un adeguato sostegno e guida da parte degli insegnanti, tradizionalmente non vengono introdotti alla modellizzazione se non alla scuola media, impedendo loro di compiere i primi passi verso aspetti che coinvolgono questo processo (Diezmann, Watters, & English, 2002; Doerr & English, 2003).

• *Risoluzione matematica*. Difficoltà legate all'apprendimento algoritmico e concettuale (Fandiño Pinilla, 2008) all'interno di procedure matematiche applicate. In questa categoria rientrano, ad esempio, errori di calcolo, di applicazione di algoritmi, di formule, di comprensione di concetti. Per quanto concerne il calcolo, Roberts (1968), Engelhardt (1977) e Brown & Burton (1978) hanno fornito un, ormai classico, contributo all'analisi degli errori. Ad esempio, Roberts li ha classificati in quattro categorie: operazioni sbagliate, errori di calcolo evidenti, algoritmi inesatti, risposte casuali. Engelhardt afferma che gli errori commessi sempre allo stesso modo dagli allievi non sono probabilmente trascurabili, ma sono un riflesso degli stili cognitivi dei bambini o della loro fase di sviluppo. Brown e Burton hanno inoltre analizzato nel dettaglio alcuni errori sistematici osservati nell'esecuzione della sottrazione da parte di allievi di scuola elementare, concludendo che gli allievi applicavano in modo corretto algoritmi scorretti (si rimanda a p. 47 per un approfondimento legato ad uno dei 30 quesiti oggetto del rapporto). Analisi di questo tipo sono particolarmente importanti nelle pratiche didattiche perché rendono l'insegnante consapevole della presenza di determinati comportamenti e atteggiamenti degli allievi. I due autori osservano che se questo tipo di analisi non avviene, l'insegnante tenderà ad interpretare il fallimento come negligenza o ignoranza completa dell'algoritmo, assegnando al bambino numerosi esercizi nel primo caso, rispiegando probabilmente l'intero algoritmo nel secondo, non sempre con buoni risultati. Infatti, molti degli errori di questo tipo sono spesso associati dagli insegnanti alla mancanza di abilità o conoscenze in un dato contesto, o a volte imputati ad un momento di distrazione. In realtà un'analisi più attenta permetterebbe un'interpretazione maggiormente centrata che considera la presenza di eventuali misconcezioni a lungo studiate e analizzate in letteratura (D'Amore & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005). Alcuni degli errori più frequenti nell'applicazione delle procedure matematiche possono emergere grazie ad uno sguardo attento da parte del docente ai protocolli degli allievi e a colloqui che potrebbero far emergere le concezioni degli allievi relative a specifiche tematiche. Come suggerisce Zan (2011) è quindi importante che: «l'insegnante abbia un "repertorio" di interpretazioni alternative, rispetto a quelle – più immediate e locali – che attribuiscono l'errore dell'allievo a sue carenze a livello di conoscenze» (p. 6).
Riguardo alla frequenza degli errori in questa fase del ciclo della matematizzazione, messa in relazione con la tipologia dell'allievo che li commette (altamente o scarsamente performante), sono interessanti i risultati di Wijaya et al. (2014) in una ricerca condotta sulle difficoltà incontrate dagli allievi nella risoluzione di alcuni quesiti PISA. In questo studio si è rilevato che gli allievi più performanti sono coloro che commettono più errori all'interno delle procedure matematiche. Una possibile spiegazione è che quelli meno performanti potrebbero bloccarsi già nelle prime fasi della risoluzione del problema, non arrivando neppure a commettere errori nelle applicazioni di algoritmi o esecuzione di calcoli.

• *Interpretazione dei risultati*. Difficoltà di interpretare e rileggere criticamente nel contesto reale il procedimento risolutivo e la soluzione matematica. Gli allievi spesso fraintendono il significato del problema contestualizzato e forniscono soluzioni matematiche che non sono coerenti o rilevanti per la situazione descritta nel compito (Palm, 2008). Le motivazioni di questo tipo di difficoltà potrebbero dipendere dalle convinzioni dell'allievo su ciò che è auspicabile, legittimo o vietato in classe. Le convinzioni degli allievi sulle aspettative dell'insegnante e sul senso della matematica possono incidere negativamente sulla loro riflessione critica. Gli studi sul

contratto didattico hanno avuto da tempo riscontri effettivi nelle pratiche d'aula e rilevano che le difficoltà in questa fase della risoluzione possano essere imputabili ad una specifica clausola del contratto didattico denominata "delega formale". Secondo quanto afferma D'Amore (1999), dopo aver scelto l'operazione e l'algoritmo da eseguire, il compito dell'allievo si limita a trascrivere il risultato, qualsiasi esso sia, senza considerare il senso del contesto problematico. L'interpretazione di quanto ricavato, dunque, non trova spazio nella risoluzione finale. Questo effetto si riscontra con ancora più forza nel caso in cui non sia l'allievo stesso ad eseguire il calcolo, ma uno strumento elettronico. Se un allievo usa la calcolatrice, la forza di dare come risposta finale un valore numerico diverso da quello che appare sul display è quasi nulla e cresce di pochissimo con l'età, come evidenziato dalla ricerca di D'Amore e Martini (1997). Questa particolare clausola del contratto didattico viene trattata nello specifico per alcuni quesiti (si veda a p. 129 e p. 182).
Un altro fattore che incide sulla capacità di rileggere criticamente i risultati a posteriori è l'acquisizione di un buon senso del numero. L'espressione "senso del numero" (*number sense*) si riferisce alla comprensione dei numeri, delle operazioni matematiche a loro correlate e della capacità di utilizzare questa comprensione per prendere decisioni sulle situazioni matematiche (McIntosh, Reys, Reys, Bana, & Farrell, 1997). L'allievo che sviluppa un buon senso del numero si aspetta naturalmente che i risultati siano plausibili rispetto a quelli attesi, ricorrendo a strategie di "checks and balances" (Reys, Reys, Emanuelsson, Johansson, McIntosh, & Yang, 1999). Il processo di controllo prevede strategie che vanno oltre la semplice verifica della correttezza del risultato di un calcolo esatto, ad esempio mediante la ripetizione dello stesso procedimento, oppure mediante la prova con un'operazione inversa. In questa fase, seppur alla fine del processo risolutivo, emergono competenze strategiche e di ragionamento che prevedono stime o previsioni sui risultati per valutarne la ragionevolezza. In generale, però, come osserva Polya (1945, p. 31):

> «persino gli allievi migliori, quando hanno ottenuto il risultato del problema e copiato in bella il loro esercizio, chiudono il quaderno e passano ad altro trascurando questa fase del lavoro tanto importante quanto istruttiva. Per questo motivo diventa fondamentale dal punto di vista didattico, dopo esser giunti alla soluzione, abituare l'allievo a porsi domande di riflessione del tipo "Si può verificare il risultato?", "Si può verificare il procedimento?", "Il risultato è coerente con la richiesta del problema?", "Si può ottenere il risultato in un altro modo?", "Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?"».

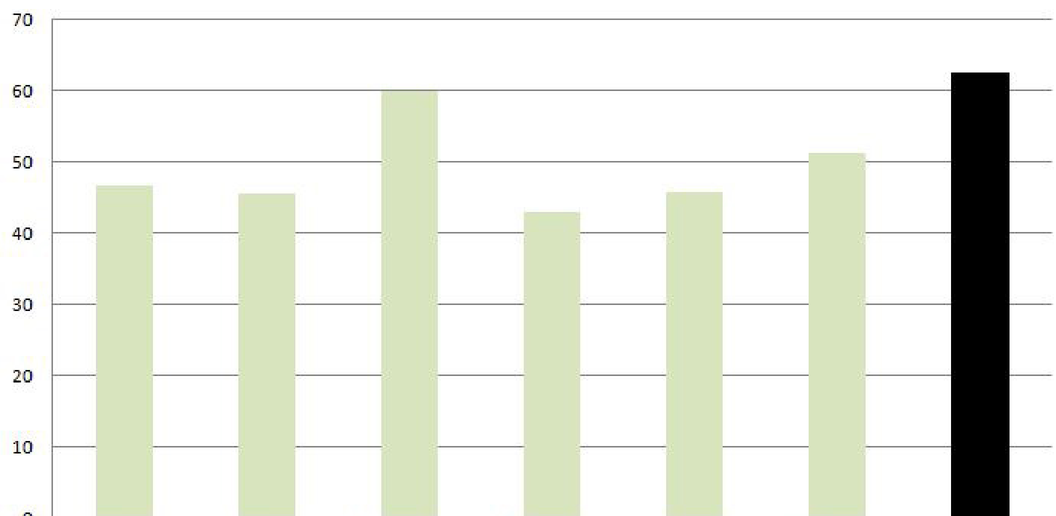
Infatti, molto spesso, l'esame del procedimento e del risultato di un problema permette collegamenti tra situazioni differenti e offre l'opportunità di discutere e approfondire interessanti aspetti matematici.
Le ricerche di Clements, pubblicate nel 1980, illustrano come il fallimento degli allievi che non sanno risolvere problemi, avvenga nei primi tre punti, precedenti all'applicazione delle procedure matematiche. Per questo è di estrema importanza focalizzare l'azione didattica in particolare nei primi passi della loro risoluzione.

3. Analisi didattica dei quesiti

3. Analisi didattica dei quesiti

Nel seguente grafico sono riportate le medie dei risultati degli allievi nei sei settori della matematica indagati dalla prova somministrata. Il valore "Matematica generale" è quella variabile costituita dalla somma dei valori di difficoltà degli item ai quali l'allievo ha risposto. Come spiegato in Crescentini (2016):

> «questo valore è stato calcolato per ogni allievo e può essere considerato come un indicatore sintetico della sua prestazione (Crescentini, Salvisberg, & Zanolla, 2014) alla prova. Il sistema con il quale è stato calcolato il valore di Matematica Generale è, rispetto ai precedenti rapporti, più raffinato e permette di valutare meglio la competenza generale. Non si tratta infatti della media dei valori degli altri traguardi ma è stato ricalcolato rispetto alla difficoltà di tutti gli item».
>
> (p. 11)



	Grandezze e misure Eseguire e applicare	Grandezze e misure Matematizzare e modellizzare	Grandezze e misure Sapere e riconoscere	Numeri e calcolo Eseguire e applicare	Numeri e calcolo Matematizzare e modellizzare	Numeri e calcolo Sapere e riconoscere	Matematica generale
Serie1	46,8	45,67	59,9	43,02	45,81	51,24	62,52

Tutti i punteggi sono stati normalizzati[4] in modo da assumere valori compresi tra 0 e 100; inoltre i punteggi non equivalgono a percentuali corrispondenti al numero di esercizi svolti correttamente, infatti in ciascun settore i quesiti sono stati ponderati per il rispettivo coefficiente di difficoltà. «In pratica, chi ha svolto correttamente gli esercizi con elevato coefficiente di difficoltà ottiene un punteggio superiore a chi ha svolto un uguale numero di esercizi con coefficiente di difficoltà inferiore» (Crescentini, 2016, p. 12). Le due dimensioni che hanno raggiunto il valore medio più basso sono *Numeri e calcolo - Matematizzare e modellizzare* e *Grandezze e misure - Matematizzare e modellizzare*, dunque all'interno dei due ambiti di competenza scelti nella prova (*Grandezze e misure* e *Numeri e calcolo*) l'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* è risultato quello che ha creato maggiore difficoltà per gli allievi. È possibile anche notare che i due valori relativi all'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* sono tra loro confrontabili per i due diversi ambiti, segno che è proprio l'aspetto di competenza a creare difficoltà negli allievi e non l'ambito.

[4] L'operazione di normalizzazione consiste nel far sì che i punteggi si distribuiscano su scale che permettano il confronto.

Si è dunque deciso di focalizzare l'attenzione su questo processo cognitivo, spinti, oltre che dall'interesse didattico verso una componente fondamentale della mobilitazione di competenze in matematica, dalla necessità di analizzare in modo più approfondito le motivazioni di questo insuccesso, andando ad indagare le difficoltà che avrebbero potuto incontrare gli allievi.
In questo documento riportiamo l'analisi didattica dei 30 quesiti che sono stati raggruppati in 7 categorie, create in base alla tipologia di quesito o al processo risolutivo utile alla ricerca della soluzione, piuttosto che sui contenuti matematici messi in gioco nel quesito.

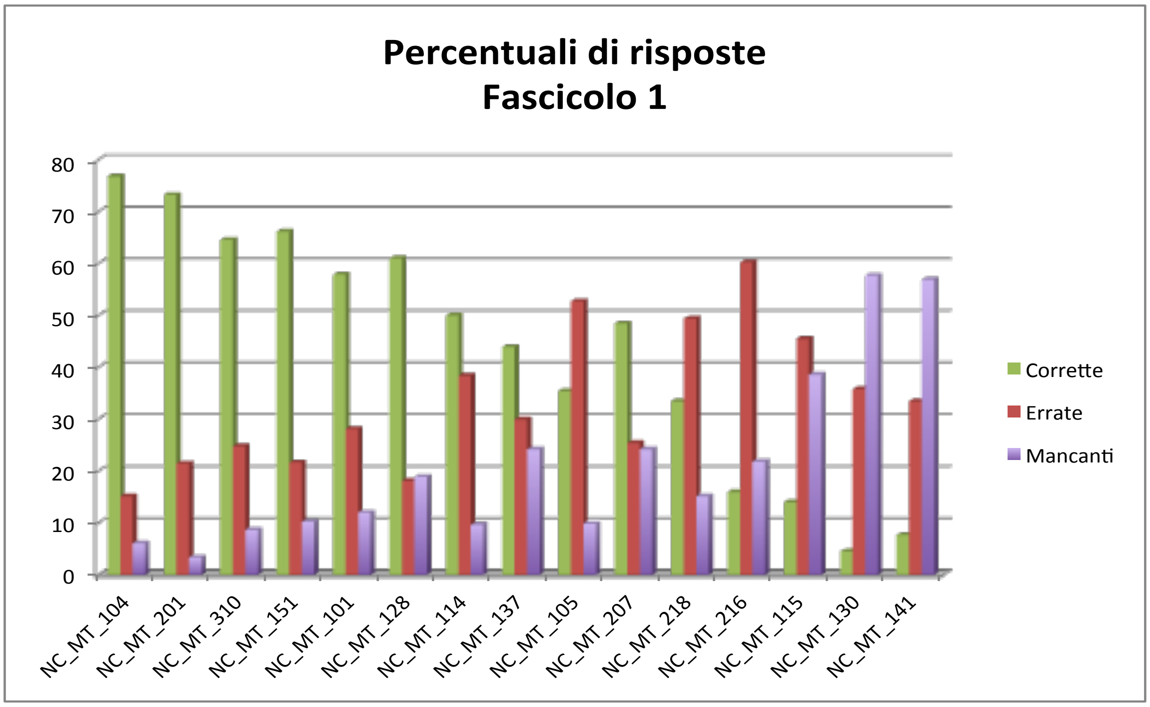
Le 7 categorie scelte sono:
- dal testo verbale al processo risolutivo (9 quesiti);
- dal testo di un problema a possibili domande (1 quesito);
- dal processo risolutivo al testo del problema (1 quesito);
- problemi che richiedono un valore numerico univoco (8 quesiti);
- problemi con relazioni tra più dati (6 quesiti);
- problemi con dati sovrabbondanti (2 quesiti);
- processo *Esplorare e provare* (3 quesiti).

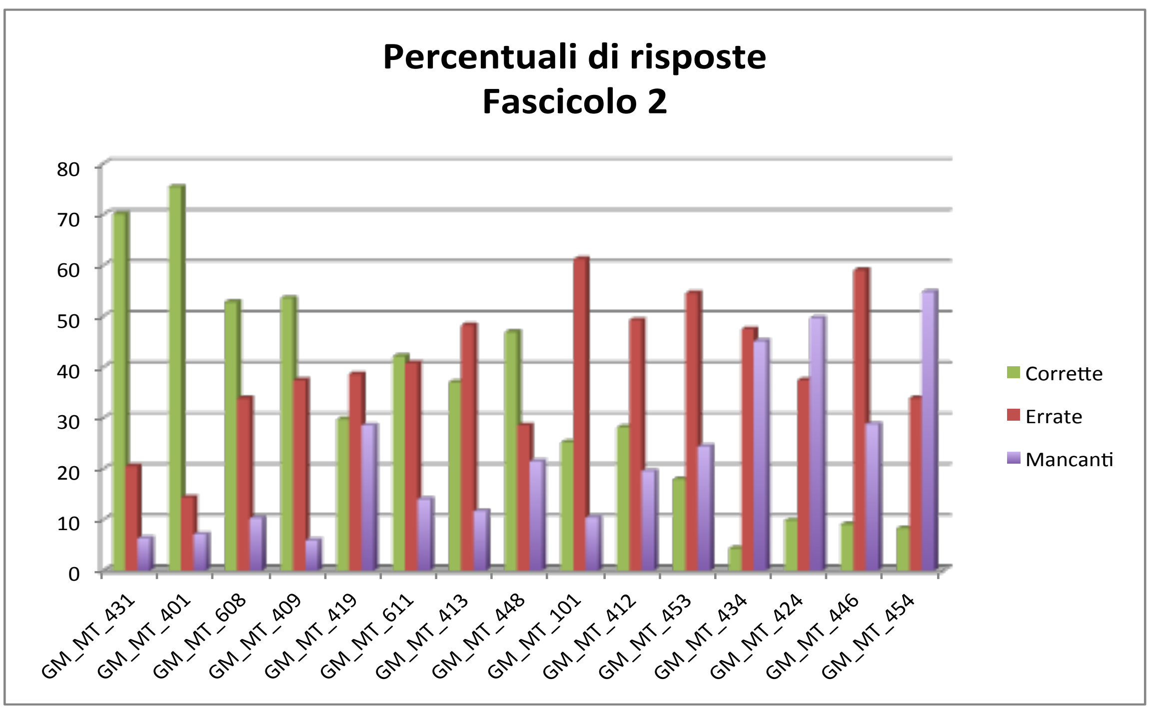
Per ogni quesito è indicata la percentuale delle risposte mancanti o non valide, corrette ed errate. Nello specifico dei quesiti a risposta chiusa sono state considerate non valide le risposte degli allievi che individuano più di una opzione. Sia per le risposte corrette che per quelle non corrette si sono create delle sottocategorie per analizzare più in dettaglio sia le procedure risolutive giuste, sia gli errori più frequenti riscontrati dall'analisi dei protocolli. Si è inoltre indicato il traguardo di apprendimento che viene mobilitato per ogni quesito, tratto dal *Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015). Ciascun item è accompagnato inoltre dall'analisi e dall'interpretazione dettagliata dei risultati, ricca di riferimenti teorici e di significativi protocolli, che evidenziano interessanti atteggiamenti risolutivi, non individuabili dalla sola osservazione delle percentuali. In D'Amore (2006) viene sottolineata l'importanza di prendere in considerazione l'analisi della produzione degli allievi:

> «Non si può sottolineare l'importanza delle descrizioni, nell'acquisizione delle conoscenze scientifiche così come nelle prime tappe degli apprendimenti matematici, senza affrontare un'altra questione fondamentale tanto per la ricerca come per gli insegnanti: l'analisi delle produzioni degli allievi. Giacché è nel quadro dello sviluppo della descrizione che si ottengono le produzioni più personali e le più diversificate, dato che esse possono essere fatte verbalmente o con l'aiuto di un disegno, di schemi… In questo caso si tratta, per la ricerca, di una questione metodologica e, per gli insegnanti, d'una questione di diagnostica».
>
> (p. 560)

Laddove il quesito sia stato somministrato la seconda volta agli allievi di prima media, sono stati forniti i risultati ottenuti organizzati in due tabelle, una che riporta a confronto le percentuali di risposte corrette, errate, mancanti nelle due somministrazioni e una che in modo più dettagliato riporta le percentuali relative agli errori più frequenti emersi nelle due somministrazioni. Inoltre, per ciascun quesito viene riportato anche il numero di allievi di prima media intervistati. Dopodiché l'analisi dei risultati viene rafforzata dal commento puntuale di alcuni stralci di interviste trascritte fedelmente. In tali trascrizioni ci si riferisce all'allievo con la lettera A. e all'intervistatore con la lettera I.

Per quanto concerne le risposte mancanti o non valide, così come già riscontrato nelle prove standardizzate di matematica in quarta elementare (Sbaragli & Franchini, 2014), abbiamo rilevato un crescente e sostanziale aumento, giustificato probabilmente dalla disposizione dei quesiti all'interno del fascicolo (ordinati in modo crescente per difficoltà) e dal numero di quesiti per ciascun fascicolo. Non è possibile sapere se la mancanza di risposta da parte degli allievi alle ultime domande sia dovuto all'incapacità di rispondere oppure alla mancata lettura del quesito derivante dalla mancanza di tempo. Infatti, seppure è diminuito il numero di quesiti per fascicolo rispetto alle prove precedenti di quarta elementare, 45 item per fascicolo rimane un elevato numero. Riteniamo inoltre che la scelta di mettere i quesiti in ordine di difficoltà non sia funzionale a valutare le reali competenze degli allievi. Di seguito si riportano i grafici dove emerge la crescita delle risposte mancanti o non valide fornite ai quesiti legati all'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* dei due fascicoli somministrati.





3.1. Dal testo verbale al processo risolutivo

3.1.1) Leonardo vuole disporre 36 figurine in file da 3. Quale calcolo può fare per individuare il numero di file?

Risposta: ....

Risposta corretta: 36 : 3
Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
79,1%	12,8%	8,1%

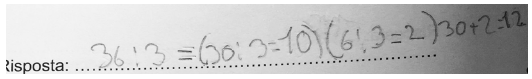
Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo risolve il problema indicando la soluzione ed esplicitando la procedura che gli ha permesso di trovarla: 36 : 3 = 12	57,8%
L'allievo non trova la soluzione del problema ma descrive solo la procedura per trovarla o fa riferimento all'operazione corretta da svolgere	13,2%
L'allievo propone la soluzione numerica e ne verifica la correttezza motivando che 12 x 3 = 36	6,5%
L'allievo propone una procedura corretta ma effettua errori di calcolo	1,6%

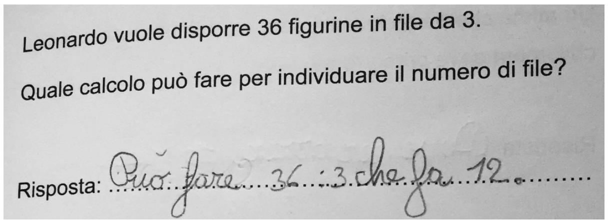
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo moltiplica i dati numerici presenti nel testo	5,1%
L'allievo propone solo la risposta quantitativa	4,1%
Altro	3,6%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espressa in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

Si tratta del quesito che ha raccolto la più alta percentuale di risposte corrette tra tutti quelli rientranti nell'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* (79,1%). È il terzo del primo fascicolo, solo l'8,1% degli allievi non risponde. Si tratta di un classico problema di ripartizione dove la domanda chiede di esplicitare il calcolo necessario per determinare il numero di file, conoscendo il numero totale di figurine disposte in ogni fila. Un aspetto interessante è la richiesta di descrivere il procedimento, invece del solo risultato.
Il 71,0% degli studenti ha fornito una risposta corretta scegliendo di svolgere la divisione utilizzando metodi diversi: calcolo mentale, calcolo in colonna e calcolo in riga, come si evince dai protocolli seguenti.

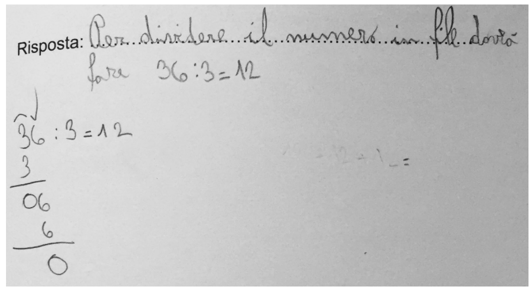
Tra questa tipologia di risposta emergono due procedimenti risolutivi prevalenti: il 57,8% del campione ha esplicitato l'operazione da effettuare e il risultato, mentre il 13,2% solo l'operazione utile per determinare il numero di file, senza svolgere il calcolo.


Risposta: 36 : 3 = (30 : 3 = 10) (6 : 3 = 2) 30+2 = 12

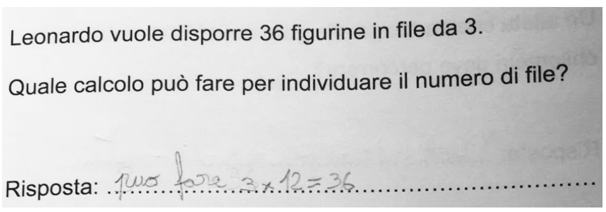

Leonardo vuole disporre 36 figurine in file da 3.

Quale calcolo può fare per individuare il numero di file?

Risposta: Può fare 36 : 3 che fa 12.


Risposta: Per dividere il numero in file dovrà fare 36:3=12

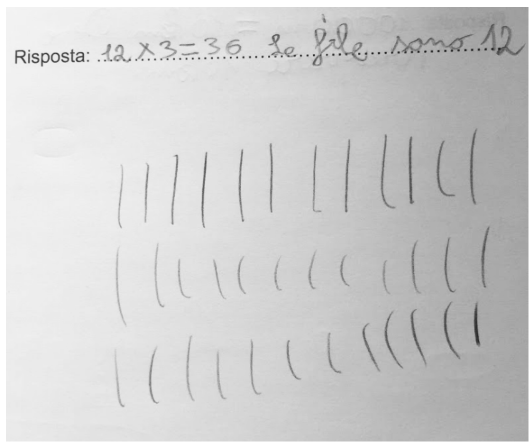
36 : 3 = 12


Leonardo vuole disporre 36 figurine in file da 3.

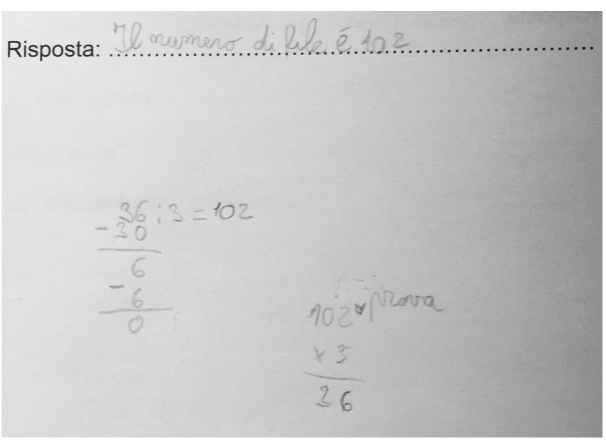
Quale calcolo può fare per individuare il numero di file?

Risposta: può fare 3×12=36

Il 6,5% degli studenti ha risposto in modo corretto proponendo la moltiplicazione come operazione risolutiva del quesito, a volte in forma aritmetica, a volte in forma figurale, come si evince dai seguenti protocolli.

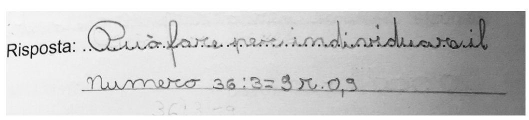

Risposta: 12×3=36 le file sono 12

La restante parte (1,6%), ha espresso correttamente la procedura per determinare la risposta attesa, ma ha effettuato un errore di calcolo per determinarne il risultato. Tali casi sono stati considerati corretti, in quanto veniva chiesto di esplicitare il processo risolutivo e non il risultato numerico. Di seguito si riportano due protocolli come esempio.

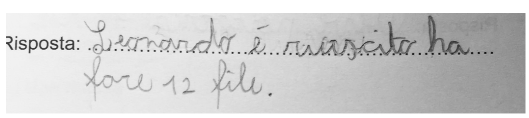

Risposta: Il numero di file é 102

36 : 3 = 102

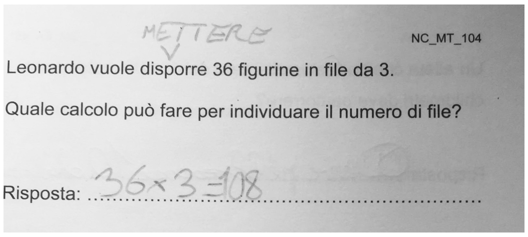
102 prova
×3
36


Risposta: Può fare per individuare il numero 36:3=3 r.0,3

Il 12,8% degli allievi ha fornito una risposta errata. In particolare, il 4,1% (circa un terzo di chi sbaglia) propone come risposta il numero di file senza esplicitare il processo risolutivo, come mostrato nel protocollo a fianco.


Risposta: Leonardo è riuscito ha fare 12 file.

In questo caso, emerge una lettura poco attenta del testo, in particolare della richiesta. Questi allievi si sono infatti concentrati sul prodotto e non sul processo risolutivo richiesto; atteggiamento forse derivante dalle consuete prassi didattiche che vertono sull'esplicitazione del risultato piuttosto che del procedimento. A questo proposito in Zan (2007b) si suggerisce un ribaltamento nella prassi didattica anche nell'ottica della valorizzazione dell'errore: «Un ambiente collaborativo, in cui l'attività matematica è centrata sui processi anziché sui prodotti, in cui il senso di abilità è associato alla consapevolezza di pensare piuttosto che alla correttezza del risultato, permette di vivere positivamente anche l'esperienza di errore» (p. 41).


METTERE
NC_MT_104
Leonardo vuole disporre 36 figurine in file da 3.
Quale calcolo può fare per individuare il numero di file?
Risposta: 36×3=108

Il 5,1% degli allievi ha scelto di moltiplicare i numeri, invece di dividerli, (vedi protocollo a fianco). Questo è un tipico errore che si presenta nei problemi di questo tipo, basato sulla confusione tra moltiplicazione e divisione come operazioni risolutive. L'errore viene fatto solitamente dagli studenti che non hanno ancora colto il significato di queste due operazioni soprattutto in situazioni problematiche legate ad un contesto reale. Il protocollo sopra riportato mostra che l'allievo presta particolare attenzione alle singole parole del testo (scrive, infatti, un sinonimo del termine "disporre" per lui più accessibile, "mettere"), ma non comprende il significato della situazione nel suo complesso, dato che sceglie di eseguire la moltiplicazione dei due dati presenti nel testo. Questa scelta potrebbe essere collegata ad un atteggiamento di lettura selettiva del testo orientata alla ricerca di dati numerici da combinare e di parole chiave che suggeriscano il modo di farlo, oppure potrebbe dipendere dall'immagine che si è fatta l'allievo di problemi di questo tipo, legati alla disposizione di figurine in file, di solito presentati al fine di lavorare sulla moltiplicazione tra numeri naturali disponendo le figurine a schieramento (D'Amore & Sbaragli, 2005). Per sapere quali sono le motivazioni reali che hanno spinto a rispondere in questo modo sarebbe però importante, nella pratica didattica, fare un colloquio per comprendere più a fondo le loro convinzioni.
Il 3,6% degli allievi che sbaglia rientra invece in altre categorie generiche.

3.1.2) Aldo ha pagato la spesa con una banconota da 50 franchi ricevendo come resto le monete rappresentate. Come si può calcolare quanto ha speso?

Risposta: ....

Risposta corretta: Esempio: Ho sommato il valore delle monete ottenendo 3,85 franchi poi ho sottratto 3,85 da 50 trovando 46,15 franchi.
Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
68,1%	22,4%	9,5%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo mostra la sequenza di operazioni (addizioni del valore delle monete e poi sottrazione del risultato da 50) effettuata parzialmente o in modo completo esplicitando il risultato senza commettere errori di calcolo	30,5%
L'allievo indica una sequenza corretta di operazioni ma riporta errori nei calcoli	21,3%
L'allievo descrive a parole il procedimento risolutivo senza svolgere alcun calcolo	10,6%
L'allievo sottrae a 50 il valore di una moneta alla volta, oppure prima i valori interi e poi i centesimi	5,7%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica solamente la risposta numerica 46,15 franchi senza specificare il procedimento	7,3%
L'allievo somma il valore delle monete	6,1%
L'allievo sottrae 50 franchi a 3,85 franchi	4,1%
Altro	4,9%

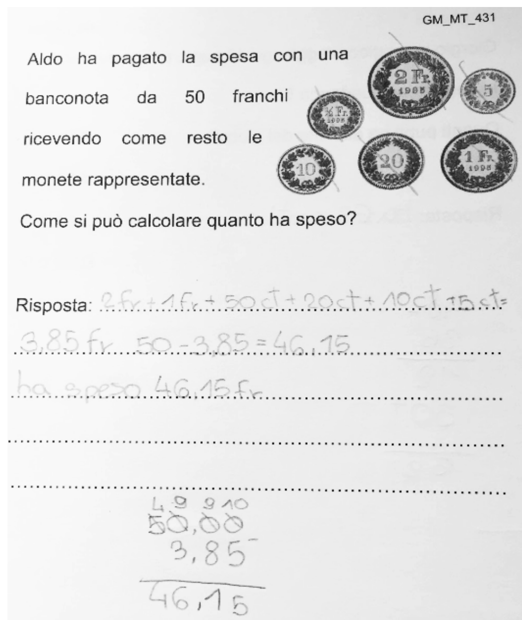
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

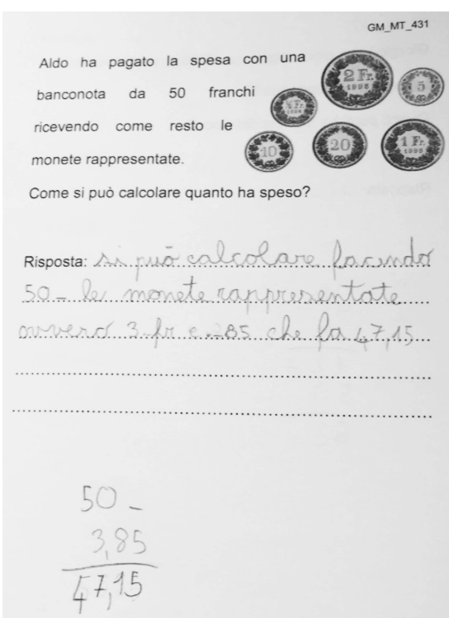
Anche questo quesito ha ottenuto una buona percentuale di risposte corrette (68,1%). È il primo del secondo fascicolo, dunque presumibilmente è stato letto da tutti gli allievi; nonostante ciò il 9,5% non ha risposto.

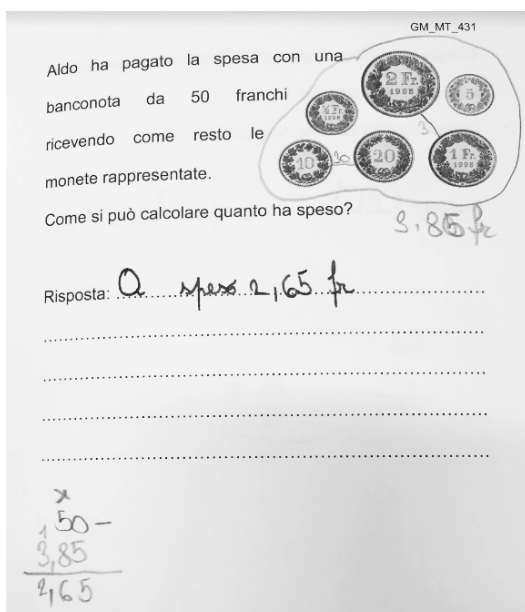
Il quesito chiede di esplicitare il processo risolutivo da attivare per determinare la spesa complessiva. Il contesto presentato è abbastanza standard in ambito didattico, essendo legato al vissuto reale: si tratta di un problema di spesa e di resto in cui viene richiesto di operare con valori monetari. In particolare, in questo caso, gli allievi devono operare con i numeri decimali, sommandoli per individuare il valore del resto e svolgendo, ad esempio, una sottrazione per capire quanto ha speso Aldo. Il contesto è molto simile a quello proposto nei quesiti 3.7.1 e 3.7.2 del paragrafo 3.7. Per come è posta la domanda, tuttavia, il focus in questo caso è l'esplicitazione del processo risolutivo. Va inoltre osservato che il valore numerico del resto doveva essere ottenuto dalle immagini delle monete raffigurate e non da dati numerici presenti nel testo verbale. Per rispondere occorre quindi la conoscenza del valore delle monete correnti in Svizzera.

La maggioranza degli allievi che risponde correttamente sceglie di descrivere e svolgere le procedure algoritmiche utili per determinare la spesa complessiva (51,8%).

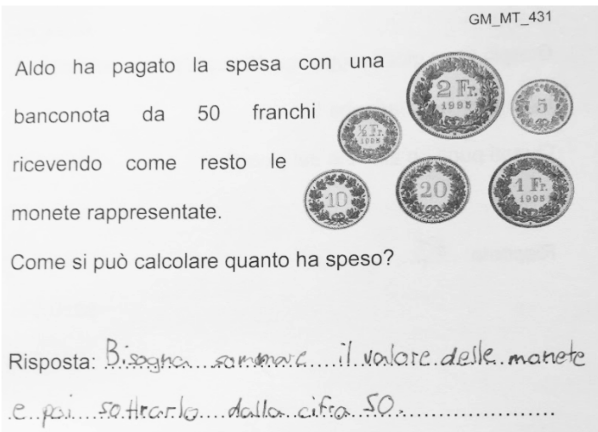
Il 30,5% realizza un protocollo simile all'esempio proposto a fianco, senza commettere errori di calcolo: gli allievi scelgono inizialmente di esplicitare il calcolo del valore del resto (individuato attraverso la somma dei valori di ogni moneta) e, in un secondo momento, la procedura per determinare la spesa totale (individuata sottraendo al valore della banconota quello complessivo del resto).
Il 21,3% attua lo stesso procedimento, ma commette errori di calcolo dovuti "al prestito" o a difficoltà nell'incolonnamento dei numeri, come mostrano rispettivamente i due protocolli seguenti.

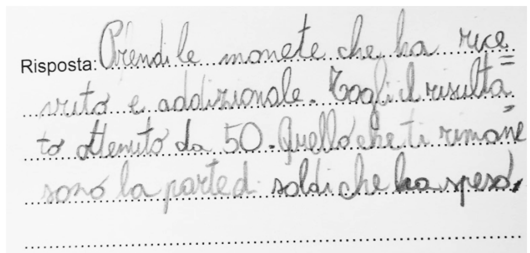




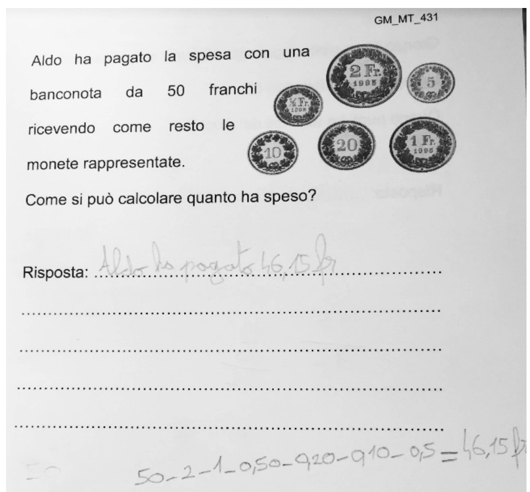


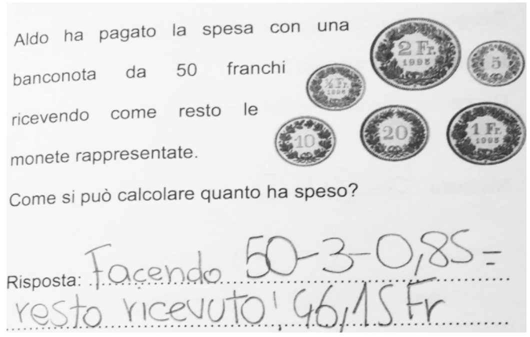
Nuovamente, essendo l'obiettivo del quesito quello di valutare il processo risolutivo e non la correttezza algoritmica delle procedure, tali risposte sono state considerate valide. Dal punto di vista didattico sarebbe bene sottolineare con gli allievi tale differenza e mettere in evidenza l'importanza di saper gestire e integrare i molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica: concettuale, algoritmico, strategico, comunicativo, di gestione dei diversi registri semiotici ecc. (Fandiño Pinilla, 2008).
Il 10,6% del campione, invece, riporta la strategia risolutiva senza esplicitare operazioni aritmetiche in forma simbolica e senza svolgere alcun calcolo, ma argomentando a parole il procedimento da seguire. È un modo differente di rispondere al problema, affidandosi al registro verbale-argomentativo piuttosto che a quello aritmetico. Tale scelta è solitamente meno frequente, in quanto più lontana dalle consuete richieste in ambito matematico.





Il 5,7% degli allievi sceglie di sottrarre al valore della banconota quello di una singola moneta alla volta, come mostrato nel protocollo a fianco. Come considerazione generale, va osservato che poco più della metà degli allievi che ha fornito una risposta corretta effettua il calcolo a mente per determinare il valore del resto. La maggioranza imposta l'algoritmo in colonna. Sono invece pochi coloro che scelgono di operare attraverso il calcolo in riga (circa il 2% del campione) e nessuno di questi fa errori dovuti alla gestione dell'algoritmo della sottrazione con numeri decimali. Si riporta a fianco un protocollo di un allievo come esempio.



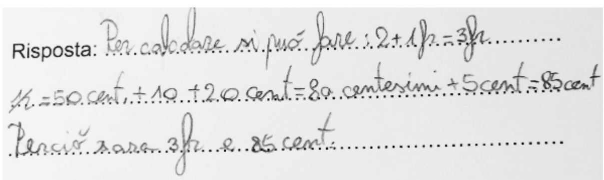

Aldo ha pagato la spesa con una banconota da 50 franchi ricevendo come resto le monete rappresentate.

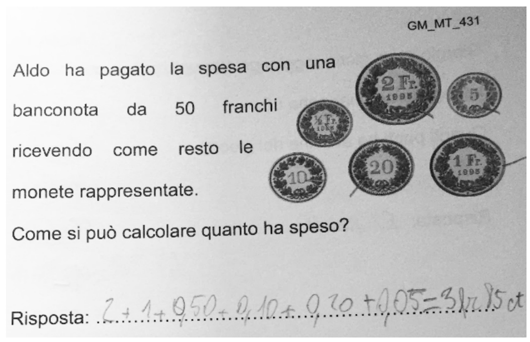
Come si può calcolare quanto ha speso?

Risposta: Facendo 50-3-0,85= resto ricevuto! 46,15 Fr

Il 7,3% degli allievi (circa un terzo delle risposte sbagliate) ha presentato solo il risultato e non il procedimento seguito. Seppur corretto il valore numerico, la risposta è da considerare errata, in quanto non soddisfa la richiesta. Come per il quesito precedente, emerge una lettura superficiale del testo: non si chiede infatti quanto ha speso Aldo, bensì come si può calcolare tale spesa.

La lettura superficiale, si riscontra anche nelle risposte incomplete: il 6,1% di queste, infatti, presentano solo la procedura per determinare il valore del resto attraverso un'argomentazione o verbale-aritmetica (protocollo a sinistra) o solo aritmetica (protocollo a destra), ma non esplicitano come si può calcolare quanto ha speso Aldo.


Risposta: Per calcolare si può fare: 2+1fr.=3fr. ½ = 50 cent. + 10 + 20 cent. = 80 centesimi + 5 cent. = 85 cent Perciò sarà 3fr. e 85 cent.


GM_MT_431

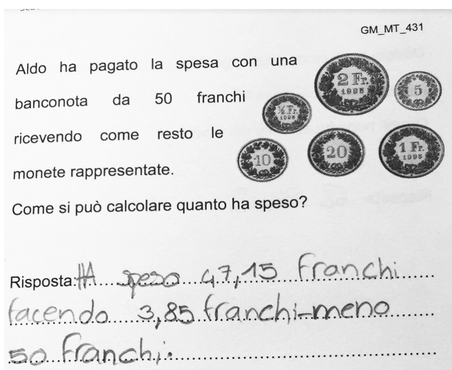
Aldo ha pagato la spesa con una banconota da 50 franchi ricevendo come resto le monete rappresentate.

Come si può calcolare quanto ha speso?

Risposta: 2+1+0,50+0,10+0,20+0,05=3fr.85 ct

Si può ipotizzare che questi studenti abbiano concentrato la loro attenzione solo sul valore numerico delle immagini delle monete, mettendo in secondo piano lo stimolo e la richiesta del problema.

Infine, il 4,1% delle risposte presenta un valore della spesa (a volte corretto a volte derivante da errori di calcolo) ottenuto sottraendo 3,85 a 50, ma nella spiegazione del procedimento, l'allievo dichiara di sottrarre 50 a 3,85. Di seguito si riporta un protocollo esemplificativo.

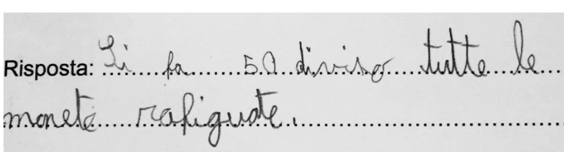

GM_MT_431

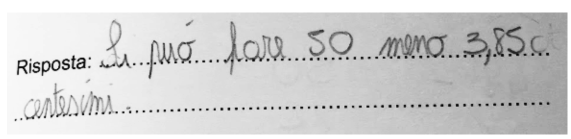
Aldo ha pagato la spesa con una banconota da 50 franchi ricevendo come resto le monete rappresentate.

Come si può calcolare quanto ha speso?

Risposta: HA speso 47,15 franchi facendo 3,85 franchi meno 50 franchi.

Nella categoria "Altro" sono presenti risoluzioni completamente erronee e diverse dalle precedenti, come mostrato dai seguenti protocolli.


Risposta: Si fa 50 diviso tutte le monete rafigurate.


Risposta: Si può fare 50 meno 3,85 c centesimi.

In questi casi è evidente un approccio al testo matematico condizionato dalla ricerca di una o più operazioni da combinare fra loro in modo non consapevole, al fine di arrivare ad una soluzione.

3.1.3) Osserva il biglietto aereo presentato nell'immagine:

Scrivi un procedimento che permette di calcolare la durata del volo da Milano (Bergamo) a Parigi Beauvais.

Risposta: ....

Risposta corretta: Esempio: Dalle 20.40 alle 21.40 è passata un'ora, dalle 21.40 alle 22.15 sono passati 35 minuti. Quindi in tutto il volo dura 1 ora e 35 minuti.
Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
22,8%	45,5%	31,7%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo ragiona per completamento, somma a 20.40 ore e minuti fino ad arrivare a 22.15, mostrando i calcoli	13,8%
L'allievo mostra la sottrazione tra gli orari 22.15 e 20.40 e calcola il risultato nel sistema sessagesimale	5,9%
L'allievo descrive il procedimento da seguire ma non effettua alcun calcolo	3,1%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita il procedimento ma scrive solo il risultato	15,0%
L'allievo calcola la differenza nel sistema decimale (22,15 - 20,40), in alcuni casi poi convertendo il risultato (1,75 diventa 2,15)	9,5%
2 ore e 35 minuti	3,0%
2 ore e 55 minuti	2,6%
1 ora e 25 minuti	2,4%
2 ore e 25 minuti	2,2%
Altro	10,8%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

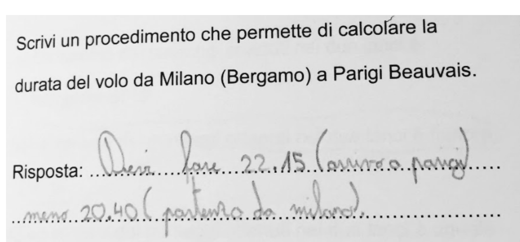
Il quesito registra un numero di risposte corrette piuttosto basso (22,8%) e, nonostante sia solo il tredicesimo del secondo fascicolo, è uno di quelli in cui si riscontra un alto numero di risposte mancanti (31,7%).

L'item risulta piuttosto articolato, dato che mette in gioco differenti conoscenze e abilità. Innanzitutto, è richiesta la capacità di leggere correttamente le informazioni presenti in una tabella e saperne ricavare i dati con cui operare per comprendere la situazione descritta. Come già illustrato nel paragrafo 2.1., a livello internazionale viene messa in evidenza l'importanza di saper decodificare informazioni grafiche per vagliare dati presenti sui giornali, media, internet. Tale competenza sembrava in parte raggiunta dagli allievi del Canton Ticino durante la valutazione didattica delle prove standardizzate di quarta elementare (Sbaragli & Franchini, 2014).

In particolare, in questo quesito, l'immagine mostra un reale biglietto aereo elettronico scansionato da un noto sito internet. Il contesto è dunque reale, tuttavia occorre domandarsi se faccia o meno parte del vissuto di un bambino di quell'età. Gli allievi infatti potrebbero non avere un'adeguata *enciclopedia* che permetta loro di utilizzare le informazioni presenti nel testo in modo efficace (Zan, 2007b). Un altro fattore da considerare è la complessità dell'immagine mostrata, in cui sono presenti molte informazioni parassite rispetto ai dati utili a rispondere alla domanda, soprattutto per coloro che non hanno esperienza di biglietti elettronici. I numeri necessari per rispondere alla domanda posta (20.40 e 22.15) non sono preceduti da una parola che esplicita il loro significato ("ora", "orario di partenza", "orario di arrivo"), ma solo da informazioni indirette ("partenza" e "arrivo") e hanno inoltre la stessa forma (due numeri separati da un punto) dei numeri che indicano il valore monetario ("16.00 EUR"). Questo tipo di rappresentazione, che prevede l'uso del punto sia nel valore monetario sia nell'orario - nel primo caso al posto della virgola e nel secondo in modo corretto - è spesso presente nei testi di informazione quotidiana, anche se è imprecisa dal punto di vista matematico. Tale lettura può quindi risultare consueta per gli adulti, ma potrebbe essere incomprensibile per gli allievi di quinta elementare. Utilizzare la stessa forma per indicare due numeri in sistemi diversi, uno decimale e uno sessagesimale, potrebbe confondere l'allievo e indurlo a operare allo stesso modo nell'uno e nell'altro caso. In quest'ottica risulterebbe molto interessante lavorare in classe con giornali e siti web opportuni, da cui estrapolare tabelle, grafici per poter ragionare con gli allievi sul senso dei numeri presenti, sulle loro rappresentazioni, sul significato delle informazioni nascoste. Come suggerisce Bolondi (2005):

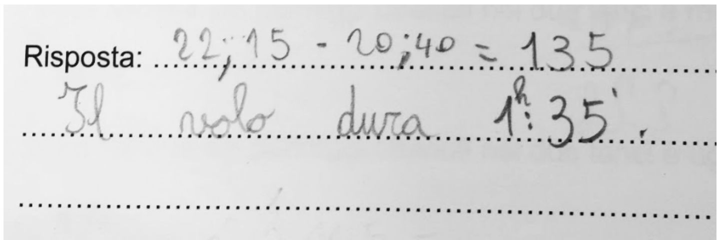
> «Invece di domandarci che cosa, nel nostro bagaglio scolastico di formule, nozioni, ricette, schemi, può servirci per leggere e capire il giornale, proviamo a partire dal giornale, e fare su questo un po' di matematica: proviamo a costruire, lavorando su quello che leggiamo, qualche idea e qualche tecnica della matematica e proviamo a esplorare sul campo le proprietà degli oggetti matematici».
>
> (p. 2)

È auspicabile che la capacità di leggere un grafico o una tabella venga ampliata attraverso l'acquisizione di strumenti, tecniche e procedure via via più elaborate, necessarie per far fronte alla rappresentazione e alla manipolazione di dati sempre più complessi.

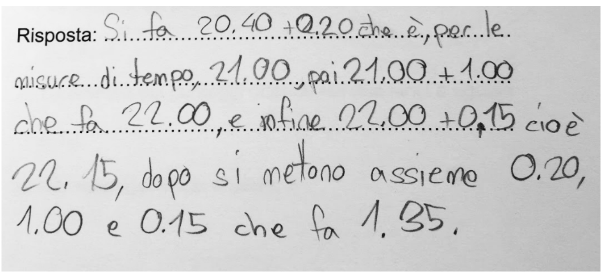

Scrivi un procedimento che permette di calcolare la durata del volo da Milano (Bergamo) a Parigi Beauvais.

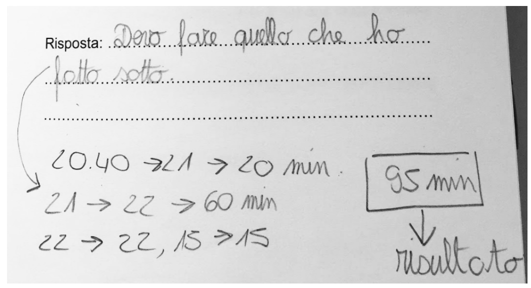
Risposta: Devi fare 22.15 (arrivo a parigi) meno 20.40 (partenza da milano).

Una volta individuate dall'immagine le informazioni necessarie per risolvere il quesito occorre descrivere il procedimento per calcolare la durata del volo. Ciò viene svolto in modo corretto dal 22,8% degli allievi. Di questi, solo il 3,1% esplicita la necessità di svolgere una differenza tra i due orari presentati nel biglietto aereo, come si rileva dal protocollo nella pagina precedente. La restante parte di chi risponde in modo corretto (19,7%) svolge anche le operazioni per determinare il tempo di volo, come riportato nel seguente protocollo.

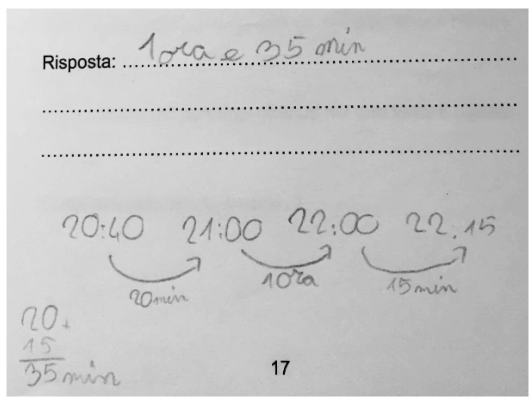

Risposta: 22;15 - 20;40 = 135
Il volo dura 1h:35'.

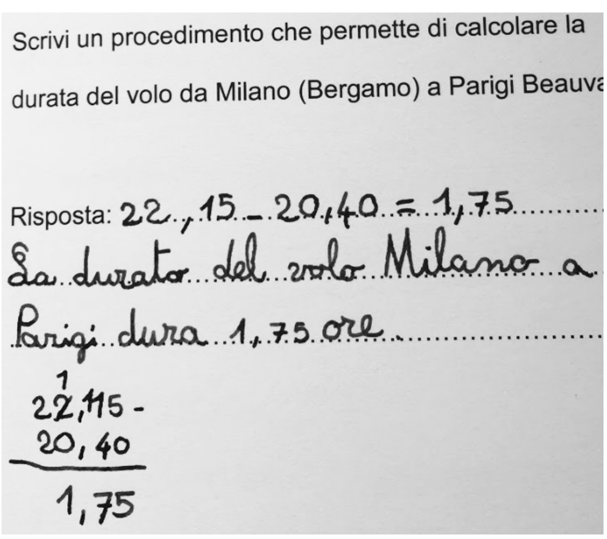
Il 13,8% ragiona per completamento, addizionando all'orario di partenza le ore e i minuti necessari per raggiungere quello di arrivo, aggirando così la difficoltà nel gestire il sistema sessagesimale. Come si può notare dai protocolli seguenti, tra gli allievi che scelgono questa strategia risolutiva, si osservano delle differenze: la maggior parte ha descritto il processo attraverso una rappresentazione grafica, mentre la restante parte ha optato per una argomentazione verbale.

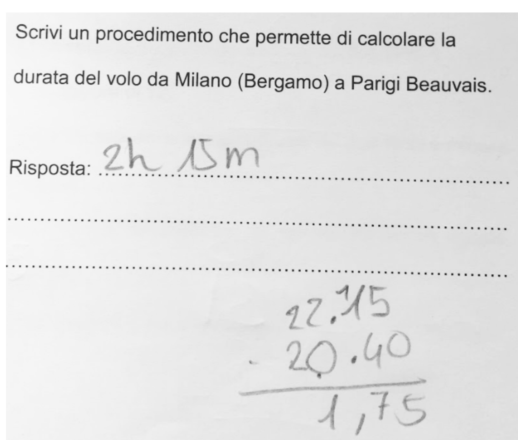

Risposta: Si fa 20.40 +0.20 che è, per le misure di tempo, 21.00, poi 21.00 + 1.00 che fa 22.00, e infine 22.00 +0,15 cioè 22.15, dopo si metono assieme 0.20, 1.00 e 0.15 che fa 1.35.


Risposta: Devo fare quello che ho fatto sotto.
20.40 → 21 → 20 min.
21 → 22 → 60 min
22 → 22,15 → 15
95 min
risultato

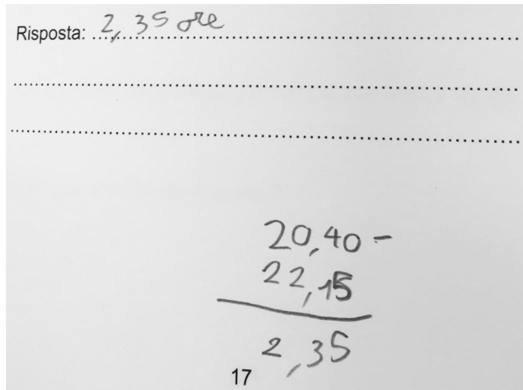
Anche in questo caso la risposta scorretta più frequente è quella in cui si dichiara la durata del volo, in alcuni casi coincidente con il valore numerico corretto, in altri scorretto, senza esplicitare in alcun modo il processo risolutivo (15,0%). Inoltre, il 9,5% opera come se si trattasse di numeri decimali, convertendo eventualmente solo successivamente in sistema sessagesimale, ma cadendo spesso in errore (vedi protocolli seguenti).


Risposta: 1 ora e 35 min
20:40 21:00 22:00 22.15
20 min 1 ora 15 min
20+
15
35 min
17


Scrivi un procedimento che permette di calcolare la durata del volo da Milano (Bergamo) a Parigi Beauva
Risposta: 22,15 - 20,40 = 1,75
La durata del volo Milano a Parigi dura 1,75 ore.
22,15 -
20,40
1,75


Scrivi un procedimento che permette di calcolare la durata del volo da Milano (Bergamo) a Parigi Beauvais.
Risposta: 2h 15m
22.15
- 20.40
1,75

Questi errori, anche se legati alla fase algoritmica della risposta e non procedurale, hanno pesato nella valutazione della risposta. Nel quesito, infatti, per descrivere le procedure da attivare è indispensabile tenere in considerazione il sistema sessagesimale in cui sono rappresentati gli orari. Non si tratta solo di errori algoritmici, ma di una mancata considerazione del contesto della situazione, legata agli orari dei voli, e dunque di una necessaria gestione dei numeri in un sistema di numerazione differente.

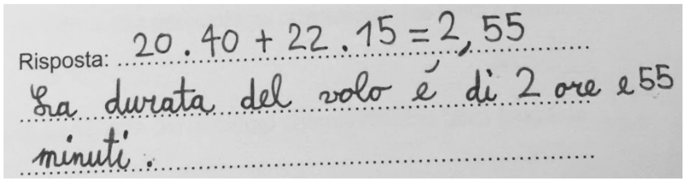


Il 3,0% degli allievi risponde 2 ore e 35 minuti, invece di 1 ora e 35 minuti e in alcuni casi viene riportata l'operazione svolta. Nel protocollo a fianco lo studente mostra di aver considerato i due numeri decimali nell'ordine nei quali compaiono nel biglietto e per come si susseguono a livello temporale: prima l'orario di partenza e poi quello di arrivo. Inoltre si osserva un tipico errore nell'esecuzione dell'algoritmo della sottrazione in colonna: sottrarre la cifra più piccola da quella più grande, indipendentemente dalla posizione delle cifre. Questa convinzione rappresenta una misconcezione considerata tipica in letteratura (D'Amore & Sbaragli, 2005). A tal proposito Zan (2007a) ricorda le ricerche di Brown e Burton (1978) che mettono in luce questo errore sistematico:

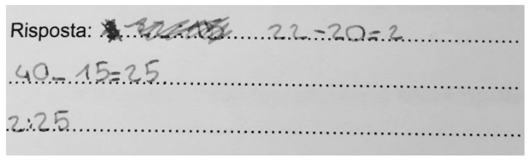
> «Un errore (bug) piuttosto tipico si può riscontrare nello svolgimento delle seguenti operazioni:
>
> | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|
> | 278-
135= | 352-
146= | 406-
219= | 543-
367= | 510-
238= | 1023-
835= |
> | 143 | 214 | 213 | 224 | 328 | 1812 |
>
> L'errore è sistematico e appare una modificazione plausibile della procedura standard: "in ogni colonna si sottrae sempre la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione".
> Spesso il tipo di comportamento descritto deriva dal bisogno del bambino di controllare situazioni percepite come nuove: egli comincia con i casi che già conosce, facendone modifiche plausibili. In questo senso il bambino si comporta come uno scienziato, anche se a differenza dello scienziato non è consapevole di generalizzare, ma soprattutto, generalizza in base a caratteristiche superficiali e non ai significati».
>
> (p. 71)

Si percepisce, in questo esempio, un'interpretazione non del tutto negativa del comportamento del bambino: egli, sì, commette un errore sistematico, ma questo deriva da una conoscenza che, in precedenti situazioni, si è rivelata efficace. Anche Schoenfeld (1985) evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda le procedure. Spesso, all'origine di questo fatto vi è una mancata comprensione o un'errata interpretazione della situazione matematica. In questo caso le difficoltà degli allievi sono relative alla seconda fase del ciclo della matematizzazione (*utilizzare*) che richiede da parte dell'insegnante un intervento mirato.

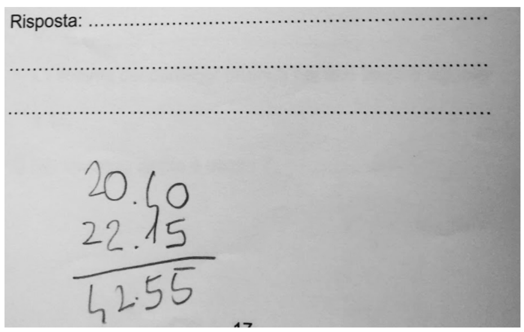
Il 2,6% degli allievi risponde 2 ore e 55 minuti, gestendo in modo fantasioso questi orari, ad esempio sottraendo fra loro le ore, senza considerare i minuti, e sommando i minuti tra loro, come mostra il protocollo seguente. Ciò evidenzia una notevole confusione di gestione del sistema convenzionale utilizzato per la grandezza tempo.



Il 2,2% degli allievi fornisce la risposta 2 ore e 25 minuti (protocollo a fianco), che deriva, anche in questo caso, dal considerare in modo disgiunto le ore e i minuti e dall'eseguire questa volta per entrambi la sottrazione (22 – 20 = 2 e 40 – 15 = 25).



Nella categoria "Altro" sono comprese risoluzioni che contengono sia errori procedurali, sia concettuali. Il seguente protocollo ne è un esempio.



3.1.4) La mamma ha deciso di comperare una nuova tovaglia per il tavolo della sala da pranzo, lungo 1,40 m e largo 80 cm. Vuole che la tovaglia caschi da ogni lato per 20 cm. Come può fare per determinare le misure da indicare al venditore per avere la tovaglia delle dimensioni desiderate?

Risposta: ....

Risposta corretta: Esempio: 1,40 m + 0,20 m + 0,20 m = 1,80 m come lunghezza e 0,80 m + 0,20 m + 0,20 m = 1,20 m come larghezza.

Risultati:

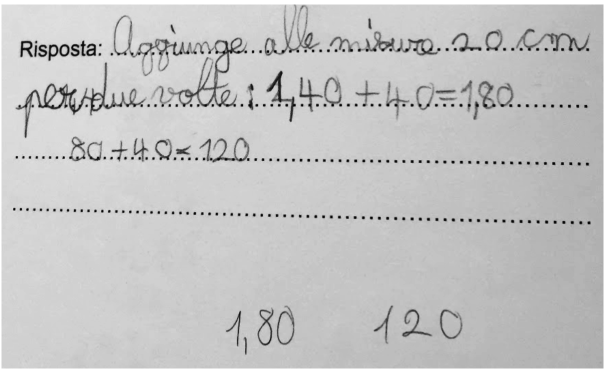
Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
4,3%	47,4%	48,3%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo converte correttamente e aggiunge ad entrambe le dimensioni due volte 20 cm o 0,20 m esplicitando il procedimento attraverso calcoli o argomentando	4,3%

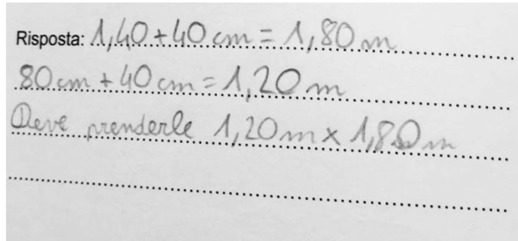
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo esplicita solo le dimensioni della tovaglia senza fare riferimento al processo attivato per trovarle	6,5%
L'allievo converte correttamente le misure ma aggiunge ad entrambe le dimensioni solo una volta 20 cm o 0,20 m	15,8%
L'allievo moltiplica o somma le due dimensioni della tovaglia	11,0%
Altro	14,1%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

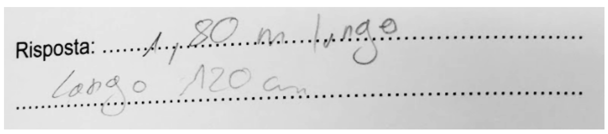
Il quesito è il trentaquattresimo del secondo fascicolo e chiede di descrivere il procedimento per determinare le dimensioni di una tovaglia da posizionare su un tavolo di cui si conoscono due dimensioni e di cui è implicita la forma. Quest'ultima dovrebbe essere desunta dalle forme standard dei tavoli (rettangolari) e dal fatto che vengano fornite due dimensioni distinte. In particolare, l'allievo deve costruirsi un modello della situazione per cui sia necessario sommare alle dimensioni del tavolo rettangolare quelle della parte di tovaglia che "casca" sui lati. La difficoltà nella costruzione di tale modello risiede nel riconoscere il fatto che la tovaglia deve fuoriuscire da tutti i lati del tavolo. Come sostiene Zan (2016, p. 43): «...in classe ci sono tanti lettori reali, che non necessariamente condividono le conoscenze e le competenze che l'autore presume». Inoltre, un altro fattore di difficoltà è legato alle dimensioni della tovaglia che sono riportate con due unità di misura differenti: la lunghezza è presentata in metri, mentre la larghezza in centimetri. Viene considerata corretta una risposta che espliciti il procedimento seguito, tenendo conto della coerenza delle grandezze.
Si tratta di un quesito a risposta aperta che ha collezionato un numero decisamente elevato di fallimenti. Come si può osservare dai dati registrati in tabella, il 95,7% degli studenti non è stato in grado di fornire una risposta corretta (47,4%) o ha scelto di non rispondere (48,3%).
Il 4,3% degli allievi fornisce la risposta corretta. Nella pagina seguente si riportano due protocolli esemplificativi.


Risposta: Aggiunge alle misure 20 cm per due volte: 1,40 + 40 = 1,80
80 + 40 = 120

1,80 120

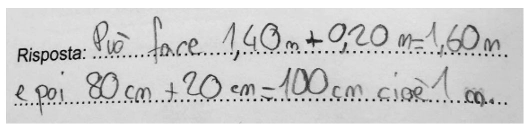

Risposta: 1,40 + 40 cm = 1,80 m
80 cm + 40 cm = 1,20 m
Deve prenderle 1,20 m × 1,80 m

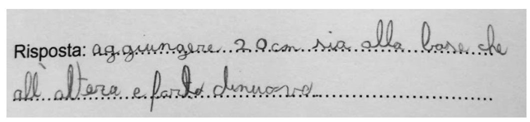
Come è stato evidenziato negli item precedenti e come emerge dai risultati di prove internazionali, la difficoltà a rispondere correttamente a quesiti a risposta aperta in cui si chiede di esplicitare il processo, e non il prodotto, è abbastanza frequente, dato che spesso gli allievi forniscono risposte in cui viene esplicitato solo il risultato e non il procedimento seguito. In questo caso, però, tra gli allievi che hanno fornito una risposta scorretta, solo il 6,5% degli allievi ha esplicitato il risultato finale, senza descrivere il procedimento attivato per determinarlo. Di seguito si riporta un esempio.


Risposta: 1,80 m lungo
Largo 120 cm

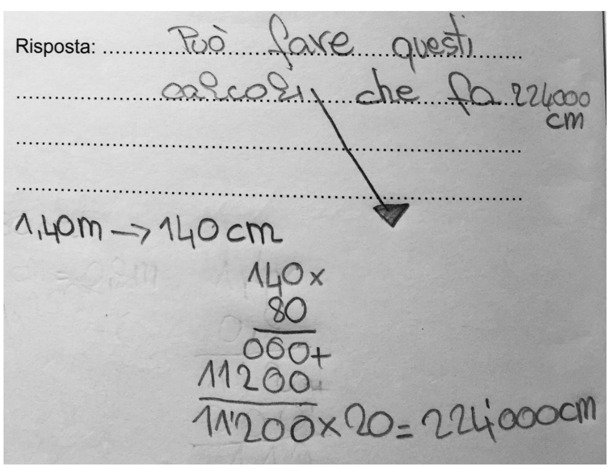
Ciò significa che gli altri non sono stati in grado di determinare una soluzione corretta, indipendentemente dalla difficoltà di saper descrivere il processo scelto.

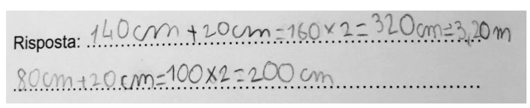
Tra le risposte scorrette più frequenti, si identificano due tendenze dominanti: il 15,8% (circa un terzo delle risposte errate) addiziona il dato 20 cm solo una volta per ciascuna delle due dimensioni, come mostrano i protocolli a fianco.


Risposta: Può fare 1,40 m + 0,20 m = 1,60 m
e poi 80 cm + 20 cm = 100 cm cioè 1 m


Risposta: aggiungere 20 cm sia alla base che all'altezza e fare dimensioni

L'11,0% (circa il 23% delle risposte errate), invece, svolge calcoli che ricordano quelli utilizzati per determinare l'area della tovaglia (moltiplica i valori) o il perimetro della tovaglia (addiziona i valori), aggiungendo o meno in modo corretto i 20 cm ai lati, come mostrano i seguenti protocolli:


Risposta: Può fare questi calcoli che fa 224000 cm
1,40 m → 140 cm
140 ×
80
000 +
11200
11'200 × 20 = 224'000 cm


Risposta: 140 cm + 20 cm = 160 × 2 = 320 cm = 3,20 m
80 cm + 20 cm = 100 × 2 = 200 cm

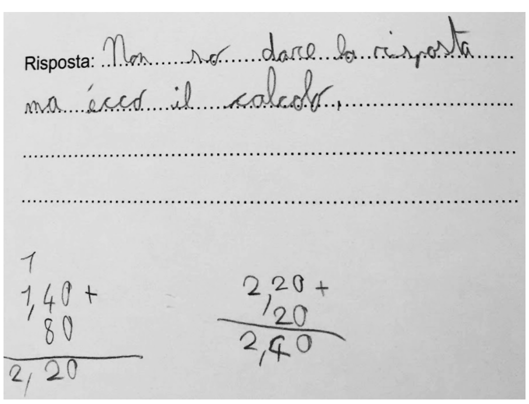
La difficoltà che si riscontra nella prima categoria può derivare dal non sapersi immaginare la situazione o dal non saperla tradurre in linguaggio matematico. Alcuni allievi potrebbero concentrarsi solo su 2 dei 4 lati del tavolo, dato che nel testo si parla di due dimensioni (lunghezza e larghezza) e quindi per ciascuna viene sommata la parte di tovaglia che "casca", senza considerare l'informazione implicita che il tavolo è rettangolare. D'altra parte c'è un aspetto molto interessante riconducibile a fenomeni di contratto didattico, che spesso vincolano i ragionamenti degli allievi. Dalle ricerche in didattica della matematica emerge un atteggiamento comune a molti allievi di differenti livelli scolastici: «conta poco il senso della richiesta, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali» (D'Amore, 1999, p. 109). A questo proposito è illuminante lo studio di Castro, Locatello e Meloni (1996), raccontata in D'Amore (1993), relativo alla risoluzione scelta da parte di allievi di quarta e quinta elementare per il seguente problema:

"I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita scolastica di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:
1. due di essi non possono pagare;
2. da Bologna a Verona ci sono 120 km;
3. un pullmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro
   (compresi i pedaggi autostradali).
Quanto verrà a spendere ciascuno?"

La stragrande maggioranza degli allievi faceva un errore ricorrente: nel calcolare la spesa per i chilometri percorsi non teneva conto del ritorno. Come afferma D'Amore (1999), i bambini erano perfettamente consapevoli del fatto che in una gita ci sono sia l'andata sia il ritorno, tuttavia al momento di risolvere, utilizzavano solo il dato per l'andata. Di fatto gli allievi non si sentono autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Alcuni allievi in questa ricerca hanno dichiarato "…ma se tu volevi sapere anche il ritorno dovevi scriverlo" oppure "Per risolvere si devono usare i numeri del problema".

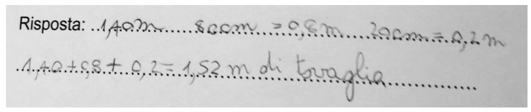
Nel secondo caso, la difficoltà potrebbe risiedere nella conoscenza del contesto quotidiano posto dal problema, l'enciclopedia delle cose del mondo. Come afferma Zan (2016, p. 58): «Solo se si possiede una certa enciclopedia il lettore è in grado di collaborare con il testo e di riempire con le opportune inferenze gli "spazi bianchi" di cui è intessuto». In questo testo è possibile che gli allievi non sappiano che solitamente ai venditori di tovaglie si esplicitano le due dimensioni: lunghezza e larghezza. Non conoscendo questo aspetto, alcuni allievi potrebbero aver immaginato che la mamma dovesse esplicitare al venditore il perimetro o l'area della tovaglia. Tale scelta potrebbe anche essere legata ad un altro aspetto inerente le routine della pratica scolastica: spesso gli esercizi e i problemi proposti in ambito geometrico o di grandezze e misure richiedono il calcolo dell'area e del perimetro delle figure.

Di seguito si riportano alcuni interessanti protocolli che mostrano convinzioni, atteggiamenti e difficoltà degli allievi.

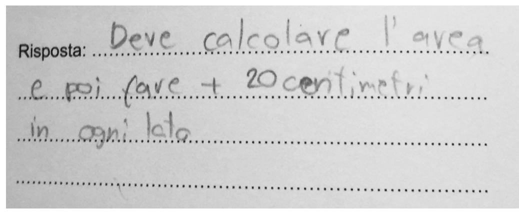


Lo studente nel protocollo a fianco dichiara di non riuscire a rispondere al problema, ma di essere in grado di fare un calcolo sommando correttamente i tre valori numerici presenti nel testo, come se "fare calcoli" fosse l'aspetto centrale della matematica. Studi sul contratto didattico hanno permesso di rivelare che gli allievi di qualsiasi livello scolastico hanno a volte convinzioni, atteggiamenti e comportamenti che nulla hanno a che fare con la matematica, ma che dipendono dall'immagine di essa che si sono costruiti, dalle attese nei confronti dei loro insegnanti ecc. (D'Amore, 1999). Tra queste vi è una clausola del contratto didattico detta: *esigenza della giustificazione formale (egf)*, basata sulla seguente convinzione: «(…) in matematica si devono sempre fare dei calcoli con i dati presenti nel testo, la maestra se li aspetta di certo» (D'Amore, 1999, p. 112). Così, anche se le operazioni appaiono slegate dal contesto descritto, vengono fatte dagli allievi, dimostrando una mancanza di senso critico e la convinzione che l'aspetto più importante della matematica sia effettuare dei calcoli e non risolvere situazioni-problema.

Nel protocollo a fianco, oltre ad emergere difficoltà di comprensione del testo e di matematizzazione orizzontale, si nota un calcolo sbagliato con numeri decimali.



Quello seguente, invece, rileva un errore concettuale molto diffuso, legato al mescolare due grandezze diverse, una bidimensionale (area) e una unidimensionale (lunghezza del lato). Ancor prima di lavorare sulle formule per il calcolo dell'area e del perimetro, è opportuno costruire adeguatamente questi due concetti sottolineando le loro differenze (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2005; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Cottino, Dal Corso, Francini, Gualandi, Nobis, Ponti, Ricci, Sbaragli, & Zola, 2011).



Seconda somministrazione.
Il quesito è stato somministrato anche a 174 allievi di prima media, ai quali sono state sottoposte alcune domande per capire il tipo di ragionamento seguito e le difficoltà rilevate nel rispondere alla domanda posta. Nella seguente tabella sono riportati i risultati delle due somministrazioni, quella rivolta agli allievi di quinta elementare (3012 allievi) e quella indirizzata a quelli di prima media. Nella seconda somministrazione è stato chiesto esplicitamente di indicare se la scelta di non rispondere fosse legata ad un'incomprensione del testo.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	4,3%	11,5%
Risposte errate	47,4%	52,9%
Risposte mancanti senza motivazione	48,3%	23,5%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	12,1%

Le risposte fornite dagli studenti in questa seconda somministrazione differiscono dalla precedente: infatti, sono diminuiti notevolmente gli allievi che hanno scelto di non rispondere. Questo fatto determina una variazione nelle percentuali di risposte corrette ed errate, anche se in ogni caso le prime rimangono molto basse (11,5%), mentre le seconde risultano superiori al 50%. Il motivo di questa differenza è probabilmente dovuto al fatto che nella seconda sperimentazione si è scelto di fornire meno quesiti e di cambiare la posizione dell'item all'interno dei fascicoli tra le varie somministrazioni. Nel test originale, il quesito era sistemato alla fine di un fascicolo costituito da 45 quesiti; nella seconda somministrazione è stato proposto un fascicolo ruotato, in cui il quesito si trovava tra i primi dei 15 totali. Questa scelta ha permesso di far emergere un aspetto interessante: circa il 10% delle risposte mancanti rilevate nella prima somministrazione sono da imputare alla posizione del quesito e non alla difficoltà percepita dagli studenti. Collocandolo all'inizio del fascicolo, infatti, molti studenti hanno avuto il tempo di rispondere.

Oltre a far emergere questi aspetti, la seconda somministrazione ha dato l'occasione di indagare le motivazioni alla base delle risposte scorrette.

Analizziamo in particolare le due categorie errate discusse precedentemente:

Descrizione categorie errate	**Percentuale prima somministrazione (V SE)**	**Percentuale seconda somministrazione (I SM)**	**N. studenti intervistati**
L'allievo converte correttamente le misure ma aggiunge ad entrambe le dimensioni solo una volta 20 cm o 0,20 m	15,8%	14,9%	5
L'allievo moltiplica o somma le due dimensioni della tovaglia	11,0%	12,1%	9

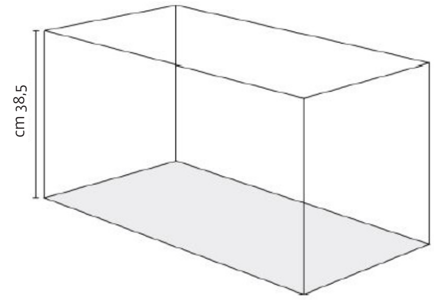
Per quanto riguarda gli allievi che hanno risposto aggiungendo una sola volta 20 cm o 0,20 m alle due dimensioni è confermata l'ipotesi della difficoltà di visualizzare e comprendere la situazione proposta e saperla matematizzare; emergono quindi difficoltà sia di lettura del mondo reale sia nel passaggio nel mondo matematico, legate cioè a quel processo di traduzione dal problema nel contesto alla sua formulazione matematica. Da alcune interviste emerge la convinzione che addizionare alle due dimensioni una sola volta 20 cm equivalga ad aggiungerlo su ogni lato di un tavolo rettangolare. Non è affiorata invece in modo esplicito la necessità di trattare solo i numeri presenti nel testo.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
Vuole una tovaglia lunga 1,60 e larga 1 m. 1,40 + 20 = 1,60 80 + 20 cm	I.: "Questo qui della tovaglia. Com'era il problema qui, me lo puoi raccontare?" L'allievo legge ad alta voce. I.: "Come può fare secondo te?" A.: "Lungo 1,60 e largo un 1 m." I.: "Facciamo finta di dover trovare una tovaglia per questo banco, cosa significa che caschi 20 cm su ogni lato?" A.: "Che deve cascare qui, qui, qui e qui di 20." (indica tutti i 4 lati del banco). I.: "Quindi se questo lato è lungo 1,40 m, quanto deve essere lunga la tovaglia?" A.: "Di lunghezza dobbiamo aggiungere 20 cm." I.: "Dove stanno i 20 cm qui o qui?" (indica due lati del banco). A.: "Qui." (indica un solo lato). I.: "Qui non servono?" (indica l'altro lato). A.: "Ah! Si, serve." I.: "Quindi quanto dovrebbe essere lunga la tovaglia per coprire il tavolo?" A.: "Dobbiamo aumentare di 40! 20 da una parte e 20 dall'altra." I.: "Dall'altro lato?" A.: "Lo stesso, sempre 40; 20 e 20." I.: "Ah, ma tu hai fatto così?" A.: "Io pensavo che aggiungere 20 significava da entrambe le misure invece no."
Può fare 160 cm x 100 cm	I.: "Raccontami la domanda della tovaglia." A.: "Ho un tavolo lungo 1 metro e 40 e largo 80 cm e ho fatto …" I.: "Cosa hai fatto?" A.: "Vuole che la tovaglia caschi da un lato per 20 cm. Allora ho aggiunto 20 cm ad ogni cosa. Quindi ho scritto 1 metro e 60 x 100." I.: "(…) Proviamo con questo tavolo (indica il banco). Se questo è 1,40 m e aggiungo 20 cm, dove arriva la tovaglia?" (indica un lato del banco). A.: "Circa qua." (indica circa 20 cm di distanza dalla superficie del tavolo al pavimento lungo la gamba del tavolo). I.: "Ok, se questo è 80 cm, e aggiungo 20 cm, dove arriva l'altro lato della tovaglia?" A.: "Qua." (fa la stessa cosa di prima sull'altro lato). I.: "Ok, quindi la nostra tovaglia così casca di 20 cm su ogni lato?" A.: "No." I.: "Perché?" A.: "Perché manca qui (indica gli altri due lati). Devo aggiungere altri 20 cm." I.: "Quindi come deve essere questa tovaglia?" A.: "Eh, 180 x 1,20."

Per quanto riguarda gli allievi che hanno risposto sommando o moltiplicando i valori numerici delle dimensioni, dalle risposte fornite emergono diversi aspetti: ve ne sono alcuni che aggiungono solo 20 cm a ciascuna dimensione e successivamente sommano o moltiplicano i risultati, oppure coloro che aggiungono i 20 cm solo dopo aver moltiplicato o sommato le misure delle dimensioni della tovaglia presenti nel testo.
Gli allievi intervistati sono stati selezionati sulla base di queste risposte. In generale, possiamo osservare che la difficoltà in questo caso è legata alla presenza di un lessico specifico; infatti, in alcuni casi, i ragazzi intervistati non comprendono in questo contesto il significato della parola "cascare" e immaginano si tratti della lunghezza della tovaglia fino ai vertici del tavolo, mentre in altri casi essi non sanno come si comunicano le dimensioni di una tovaglia ad un venditore e per questo propongono misure riconducibili al perimetro o all'area del tavolo.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
Chiedere al venditore di dargli le misure in cm 20 x 4 = 80 1,40 x 80 = 112,00 = 1,12 m	I.: "Che cosa chiede questo problema?" A.: "Chiede come fa la mamma a precisare le misure che servono per la tovaglia." I.: "Esatto, quindi vuole solo coprire il tavolo?" A.: "No, vuole che scenda di 20 cm." I.: "Ok, quindi come dobbiamo fare? Tu hai scritto "20 x 4 = 80 1,40 x 80 = 112,00 = 1,12 m" mi sapresti dire perché?" A.: "Qua io non ho ben capito il problema..." I.: "Era complicato?" A.: "Avevo capito la domanda ma non sapevo quale calcolo fare ..." I.: "Sappiamo quanto è grande il tavolo?" A.: "È un rettangolo che ha i lati 1,40 e 80 cm." I.: "Cosa vuol dire che caschi di 20 cm su ogni lato?" A.: "Che sugli angoli scenda di 20 cm." I.: "Sugli angoli o anche sui lati?" Silenzio I.: "Non lo sai?" A.: "No."
1280 20 x 4 = 80 140 x 80 = 1120	I.: "Riesci a raccontarmi cosa ti chiedeva questo quesito della tovaglia?" A.: "Sì, una signora doveva comprare una tovaglia e indicare le misure al venditore. Io ho iniziando trasformando questo qua dai m ai cm. Poi lei voleva che cascasse giù e ho calcolato tutti e 4 gli angoli ("20 x 4 = 80") poi ho fatto 140, che sarebbe la trasformazione di 1,40, per 80 poi ho preso il risultato e l'ho aggiunto agli 80 che avevo; così ho l'area." I.: "Tu sei mai andata a comprare una tovaglia? A.: "No." I.: "Ti racconto come funziona, quando compri una tovaglia tu non devi dare la misura dell'area ma la misura di lunghezza e larghezza proprio come il tavolo. Sapendo questo come risponderesti?" A.: "Che devo aggiungere 40 cm da ogni parte?" I.: "Perché 40 e non 20?" A.: "Perché sono 2 i lati da allungare."

3.1.5) Marcello ha acquistato un acquario di altezza 38,5 cm. Non sa quanti litri contiene. Scopre però che quando versa nell'acquario il primo litro d'acqua il livello raggiunto dell'acqua è situato a 5 mm dal fondo.
A questo punto Marcello scopre un modo per trovare quanti litri contiene l'acquario.
Descrivi il procedimento che potrebbe aver utilizzato.



Risposta: ....

Risposta corretta: Esempio: si contano quante volte ci stanno 5 mm in 38,5 cm, facendo 38,5 cm : 0,5 cm = 77 l.
Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
10,6%	36,6%	52,8%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo individua la risposta corretta esplicitando il procedimento risolutivo adottato, la divisione	7,5%
L'allievo descrive il procedimento da seguire senza svolgere calcoli, ma mettendo in relazione le due grandezze (l'altezza dell'acquario e quella relativa ad un litro di acqua)	3,1%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo moltiplica i numeri presenti nel testo	9,8%
L'allievo propone la divisione tra le due grandezze senza convertitore o con errore di conversione nelle unità di misura	4,1%
L'allievo indica solo il risultato senza esplicitare il ragionamento o i calcoli	1,4%
L'allievo sottrae i due numeri presenti nel testo	1,2%
L'allievo propone argomentazioni più generali	1,2%
Altro	18,9%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - Aspetto di competenza: Matematizzare e modellizzare.
Analizza relazioni tra grandezze diverse in gioco (in particolare: perimetri e aree di figure).

Il quesito è il trentasettesimo del secondo fascicolo e, come nel caso precedente, si chiede di descrivere uno dei possibili procedimenti per determinare la capacità dell'acquario. In questa tipologia di domande, non solo è richiesta l'applicazione di conoscenze e abilità legate a contenuti matematici specifici, bensì anche la capacità di mettere in campo una struttura comunicativa fondata sulla costruzione di un pensiero logico che fornisca le informazioni fondamentali per rispondere. Oltre a saper matematizzare la situazione proposta, agli allievi è richiesta

anche una certa competenza per saperla comunicare.
Le percentuali di successo sono estremamente basse (10,6%) e risulta notevolmente significativo il numero di omissioni (52,8%) che induce a riflettere sull'importanza di una pratica didattica, ancora piuttosto marginale, fondata sulle attività di discussione, argomentazione e giustificazione delle procedure. Abituare gli allievi a descrivere il procedimento risolutivo scelto è formativo non solo dal punto di vista linguistico, ma anche cognitivo, e permette di dare senso e significato ai concetti matematici. Come sottolinea Fandiño Pinilla (2008),

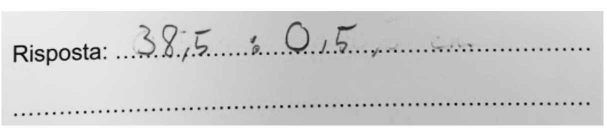
> «troppo spesso capita di trovare studenti che sembrano aver costruito un concetto, sanno effettuare calcoli, talvolta sanno anche risolvere problemi, ma hanno difficoltà precisamente nel comunicare la matematica: saper comunicare la matematica è un traguardo cognitivo specifico, non banalmente implicito negli altri apprendimenti».
>
> (p. 95)

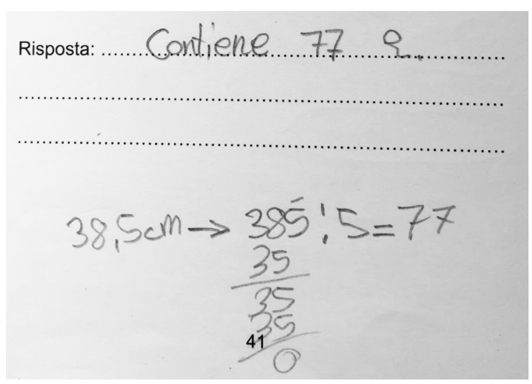
Anche nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) la comunicazione in matematica occupa un ruolo fondamentale tra gli aspetti di competenza da mobilitare:

> «saper trasmettere informazioni, descrivere, presentare, argomentare e giustificare agli altri le proprie scelte e il proprio pensiero, rendendoli comprensibili agli altri, implica l'uso di un linguaggio appropriato alla situazione, preceduto da un'attenta analisi delle risorse a disposizione e della situazione».
>
> (p. 164)

Tra i procedimenti corretti scelti dagli allievi, uno è basato sull'individuare quante volte i 5 mm sono contenuti nei 38,5 cm, impostando o effettuando una divisione tra i due numeri opportunamente trasformati in modo da avere la stessa unità di misura. Tale procedimento è stato adottato dal 7,5% degli allievi.

Di seguito si riportano i protocolli di due allievi che rispondono correttamente, in un caso esplicitando solo l'operazione, dunque il procedimento aritmetico utilizzato, e nell'altro trovando anche il risultato numerico, anche se non necessario.

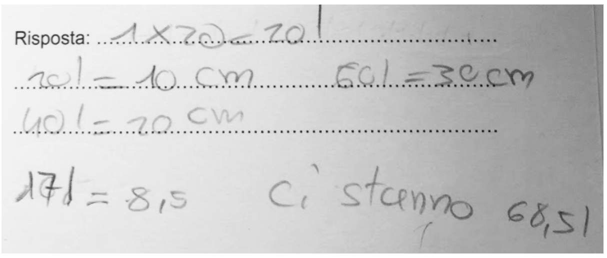

Risposta: 38,5 : 0,5

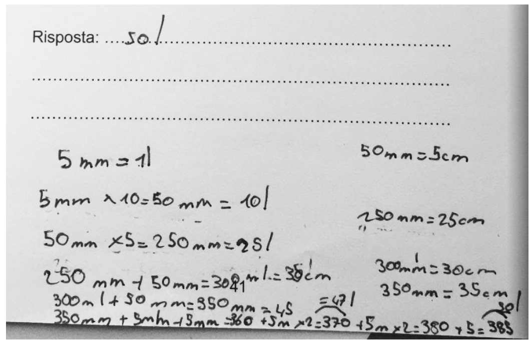

Risposta: Contiene 77 l

38,5cm → 385 : 5 = 77
35
35
35
0
41

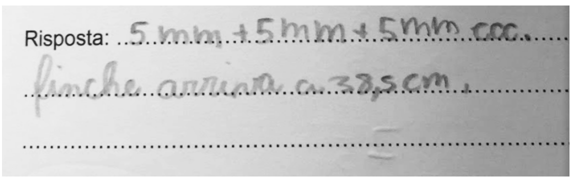
Un altro procedimento scelto è basato sul mettere in relazione le due grandezze: l'altezza dell'acquario e quella relativa ad un litro di acqua, senza svolgere calcoli. Questa via è stata scelta dal 3,1% degli allievi. In alcuni casi, gli studenti hanno proceduto per tentativi, adottando un ragionamento proporzionale del tipo: 1 l equivale a 5 mm, 10 l a 5 cm, 60 l a 30 cm, e così via, senza giungere alla risposta numerica corretta, come si vede nei protocolli seguenti.

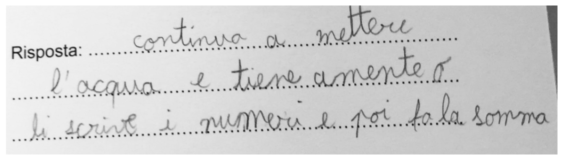
Anche in questo caso, però, come già successo nei precedenti quesiti, le risposte sono state considerate corrette perché dimostrano la scelta di un giusto procedimento adottato.


Risposta: 1 × 20 = 20 l
20 l = 10 cm 60 l = 30 cm
40 l = 20 cm
17 l = 8,5 Ci stanno 68,5 l

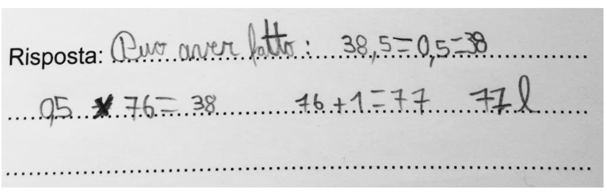

Risposta: 50 l
5 mm = 1 l 50 mm = 5 cm
5 mm × 10 = 50 mm = 10 l
250 mm = 25 cm
50 mm × 5 = 250 mm = 25 l
250 mm + 50 mm = 300 ml = 30 cm 300 mm = 30 cm
350 mm = 35 cm

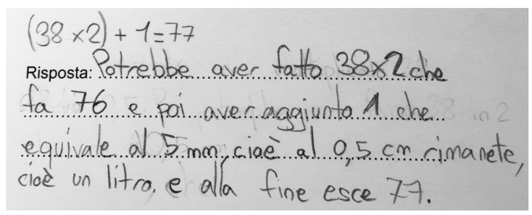
I seguenti protocolli mostrano un procedimento per completamento.


Risposta: 5 mm + 5 mm + 5 mm ecc.
finche arriva a 38,5 cm.

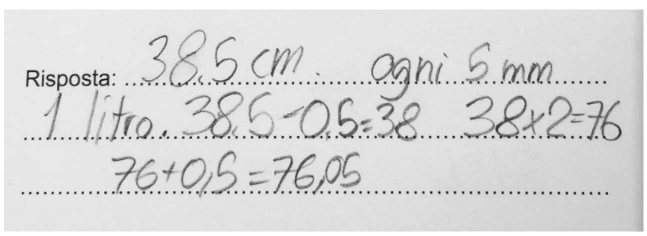

Risposta: continua a mettere
l'acqua e tiene a mente o
li scrive i numeri e poi fa la somma

Qualche allievo, invece, considera l'altezza dell'acqua ancora da versare (38 cm), valuta la quantità di litri relativa (76 l) e aggiunge il litro già versato precedentemente. I due protocolli seguenti mostrano questo procedimento ma con differente stile argomentativo, uno puramente aritmetico e l'altro discorsivo.


Risposta: Puo aver fatto: 38,5 − 0,5 = 38
0,5 × 76 = 38 76 + 1 = 77 77 l

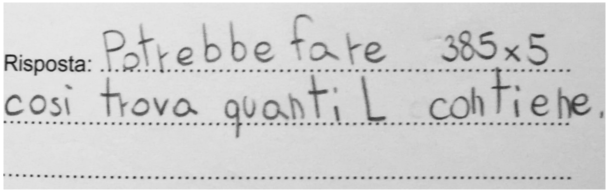

(38 × 2) + 1 = 77
Risposta: Potrebbe aver fatto 38×2 che
fa 76 e poi aver aggiunto 1 che
equivale al 5 mm, cioè al 0,5 cm rimanete,
cioè un litro, e alla fine esce 77.

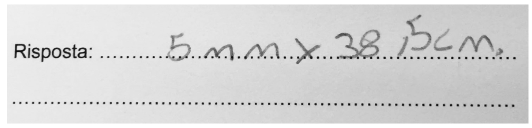
C'è anche chi ragiona in modo analogo, ma nell'ultimo passaggio (76 + 0,5) mette insieme i litri e i centimetri cadendo in errore:

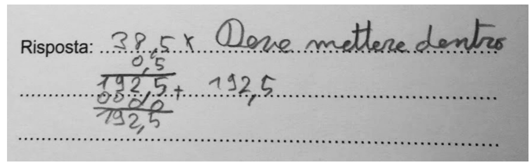

Risposta: 38,5 cm ogni 5 mm
1 litro. 38,5 − 0,5 = 38 38 × 2 = 76
76 + 0,5 = 76,05

Il quesito viene sbagliato dal 36,6% degli allievi. Gli errori più frequenti sono legati alla difficoltà di comprensione della situazione proposta dal testo, al passare dalla situazione reale alla sua rappresentazione in linguaggio matematico (matematizzazione orizzontale) e alle conversioni delle unità di misura.

Tra coloro che rispondono in modo scorretto, il 9,8% degli allievi moltiplica i numeri presenti nel testo, effettuando o meno la conversione nella stessa unità di misura, come mostrato dai seguenti protocolli.

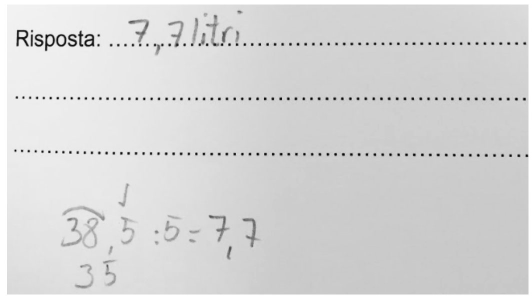




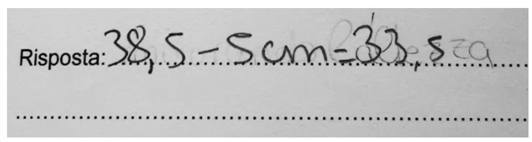


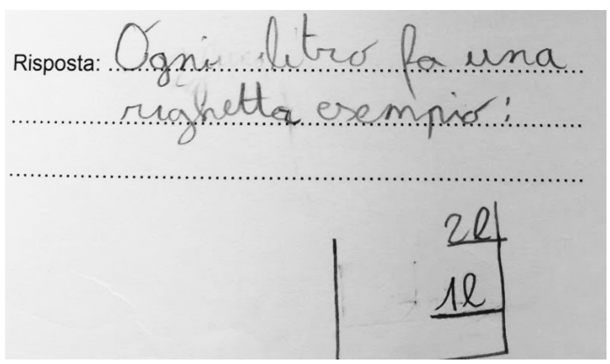
L'utilizzo della moltiplicazione potrebbe essere associato all'idea di ripetere i 5 mm fino ad arrivare a 38,5 cm. Il modello di ripetizione è tradizionalmente associato all'operazione di moltiplicazione, come ha evidenziato Fischbein nei suoi classici esempi (1985a).

Il 4,1% degli allievi invece propone un'operazione corretta ma con dati sbagliati, perché non opportunamente trasformati, come nel protocollo a fianco.



Sono presenti poi alcune risposte che prevedono la sottrazione dei due numeri presenti nel testo (a volte senza neanche effettuare la conversione) come nella figura a fianco (1,2%) o l'esposizione di un metodo troppo generico per risultare corretto (protocollo sotto) (1,2%). In quest'ultimo caso, infatti, non si evince il legame tra l'altezza e la quantità di liquido.





Seconda somministrazione.
Essendo un quesito aperto all'argomentazione, è stato interessante riproporlo al gruppo di allievi di prima media. Nella seguente tabella si riportano i risultati ottenuti:

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	10,6%	14,9%
Risposte errate	36,6%	46,6%
Risposte mancanti senza motivazione	52,8%	26,4%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	12,1%

In questo caso si registra una lieve differenza nelle percentuali di risposte corrette. Invece per quelle mancanti si osserva un calo sostanziale di circa la metà, al quale ha corrisposto un aumento delle risposte scorrette; segno ancora una volta che le risposte mancanti derivavano principalmente dal tempo insufficiente.

Di seguito si è scelto di concentrarsi sulle due categorie di errori più frequenti, per comprendere meglio le motivazioni e i ragionamenti degli allievi.

Descrizione categorie errate	**Percentuale prima somministrazione (V SE)**	**Percentuale seconda somministrazione (I SM)**	**N. studenti intervistati**
L'allievo moltiplica i numeri presenti nel testo	9,8%	12,6%	6
L'allievo propone la divisione tra le due grandezze senza convertire o con errore di conversione nelle unità di misura	4,1%	3,4%	1

Si riportano di seguito alcuni stralci di interviste.
Dalla prima intervista viene confermata l'ipotesi che l'allievo ha interpretato la ripetizione del 5 mm con l'operazione di moltiplicazione.

Risposta fornita	**Trascrizione dell'intervista**
38,5 x 5 = 190	I.: "Tu hai scritto 38,5 x 5, riesci a spiegarmi perché?" A.: "Fai 38 volte per 5 e faccio 5 mm e 5 mm e 5 mm fino ad arrivare a 38,5."

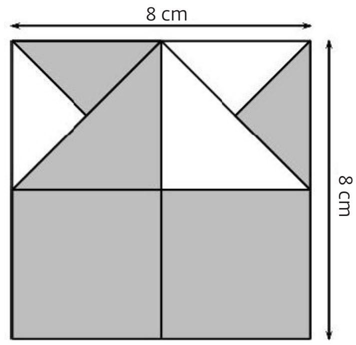
La seconda intervista, invece, mette in luce un altro aspetto legato alle conversioni di unità misura non emerso dai protocolli della prima somministrazione. L'allievo propone il modello corretto di risoluzione (la divisione), opera la giusta trasformazione di unità di misura (38,5 cm = 385 mm), poi però commette un errore legato al concetto di divisione, probabilmente ragionando per analogia. L'allievo opera una divisione tra misure espresse in *milli*metri e in modo analogo esprime il risultato trovato esplicitando come unità di misura i *milli*litri (essendo una capacità). Una coerenza formale che si richiede all'allievo necessariamente in situazioni di addizione o sottrazione (l'unità di misura rimane la stessa nel risultato) e che viene percepita essere valida anche in questo caso, ignorando completamente il senso dell'operazione individuata. L'allievo dunque mantiene lo stesso sottomultiplo (m), ma poi, dato che la consegna era quella di trovare il numero di litri, opera una conversione. Anche in questo caso manca una rilettura critica del risultato 0,077 l e la capacità di stimare l'ordine di grandezza corretto. Questo avrebbe permesso all'allievo di autocorreggersi. Come già sostenuto nel paragrafo 2.3., una delle maggiori difficoltà rilevate in tutti i livelli scolastici è la capacità di saper interpretare e riflettere sui procedimenti e risultati ottenuti ed essere capaci di ritornare eventualmente sul proprio operato, correggendosi se necessario.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
L'acquario può contenere 0,077 litri 385 : 5 = 77 ml = 0,077 l	I.: "Tu hai scelto di fare la divisione, ti è venuto 77 ml e poi l'hai trasformato in litri. Innanzitutto perché hai scelto la divisione?" A.: "Perché qui dice che un litro arriva a 5 mm dal fondo e quindi facendo diviso 5 calcolavo la quantità dell'acqua totale." I.: "Ok, ho notato che tu non hai scritto 38,5 ma 385." A.: "Perché se volevo fare la divisione qua ho i mm, qua i cm, quindi al posto di fare 0,5 ho messo 5." I.: "Giusto. Quindi tu dici che questi che vengono fuori sono ml." A.: "Sì." I.: "Perché?" A.: "Perché … avevo sbagliato … qua ci sono scritti 5 mm solo che calcolando 77, cioè la … può contenere …" I.: "È solo per capire come hai ragionato." A.: "Ma perché ho pensato che il numero 77 è uguale … se metti 77 volte un litro d'acqua arrivi a riempirla." I.: "Esatto, ma perché hai scelto ml, perché tu hai detto proprio giusto, sono 77 volte un litro." A.: "Ma perché ho fatto, trasformando questo (385 mm) mi ero detta di trasformare anche questo (77 ml)."

La terza intervista, infine, permette una riflessione sulla mancanza di consapevolezza degli allievi che preferiscono affidarsi a convinzioni, ricordi, percezioni personali, tentativi fallaci e spesso casuali, piuttosto che implicarsi in una risoluzione ragionata del problema. Zan e Di Martino (2002) hanno stabilito che i comportamenti "fallimentari" di molti studenti sono dovuti alla percezione dell'esperienza con la matematica come incontrollabile: una sorta di fatalismo. Tale atteggiamento spiega comportamenti estremamente diffusi quali le risposte date a indovinare o la rinuncia a rispondere e che appaiono del tutto naturali se l'allievo percepisce di non avere il controllo dell'esperienza.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
38,5 : 2 = 18,25 l Marcello deve versare 19,25 l nell'acquario	I.: "Secondo te facendo 38,5 diviso 2, ossia l'altezza diviso due, trovi i litri che può contenere l'acquario?" A.: "Forse." I.: "Quindi sei andato in modo intuitivo." A.: "Perché a volte quando ero alle elementari e non sapevo fare un calcolo facevo diviso due e usciva giusto."

3.1.6) Osserva la figura.



La parte grigia rappresta ¾ della superficie del quadrato con il lato di 8 cm. Quale fra i seguenti procedimenti permette di calcolare l'area della parte grigia?

a) (8 x 4 : 4) x 3
b) (8 x 8 : 3) x 4
c) (8 x 2 x 3) : 4
d) (8 x 8 : 4) x 3

Risposta corretta: d
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
21,5%	17,0%	9,5%	28,4%	23,6%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicira procedimenti sul foglio	27,4%
L'allievo svolge qualche calcolo sul foglio	1,0%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita procedimenti sul foglio	48,2%
L'allievo svolge qualche calcolo sul foglio	0,8%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

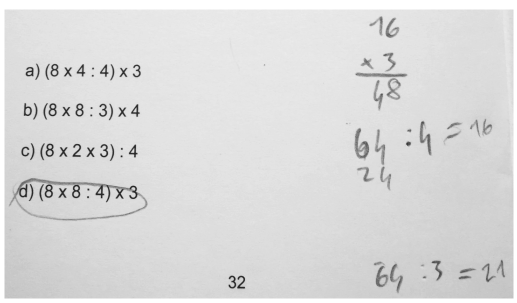
Si tratta di un quesito a risposta chiusa, il ventottesimo del secondo fascicolo, che registra un'alta percentuale di risposte mancanti o non valide (23,6%). L'interpretazione di questo fenomeno può essere legata alla posizione dell'item e alla difficoltà della domanda che mette in gioco il concetto di frazione, considerato un tema ostico dai docenti e dagli stessi allievi, e quindi eventualmente lasciato in disparte.
Il quesito chiede di scegliere tra alcune proposte l'espressione che permetta di determinare i ¾ di una superficie. In particolare, si tratta della superficie di un quadrato di lato 8 cm, come indicato nel testo e sottolineato dalla figura. La richiesta del quesito è focalizzata sul passaggio dalla situazione verbale-numerica o grafico-numerica al procedimento con scrittura aritmetica. Le conoscenze indispensabili per rispondere correttamente sono: la formula dell'area del quadrato e la gestione della frazione come operatore. Il fatto che la figura presente nello

stimolo riporti un quadrato suddiviso in parti non congruenti dovrebbe essere assolutamente ininfluente per il processo risolutivo, dato che già nel testo si dichiara che la parte grigia rappresenta i ¾ dell'intera superficie. Dunque il *question intent* non è legato all'individuazione di una frazione nell'ambito di suddivisioni non standard di rappresentazioni figurali, bensì alla traduzione in espressione di una situazione legata all'ambito *Grandezze e misure*.

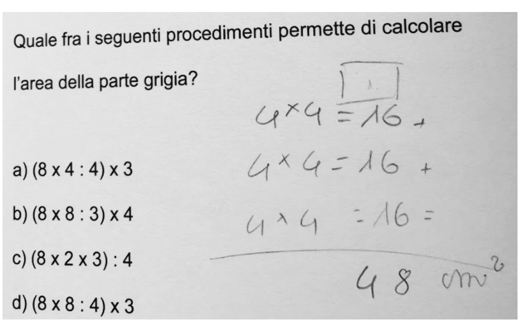
Analizzando le quattro opzioni di risposta, si osserva prima di tutto la presenza delle parentesi tonde nella stessa posizione in tutte e quattro le espressioni. Questa scelta è matematicamente superflua, date le convenzioni di precedenza tra la moltiplicazione e divisione. Qualora si fosse voluto dare un aiuto agli allievi sarebbe stato opportuno inserirle una all'inizio e una dopo il secondo numero per evidenziare il calcolo dell'area del quadrato. Messe in questa posizione risultano un distrattore superfluo per la valutazione delle competenze mobilitate dal quesito.

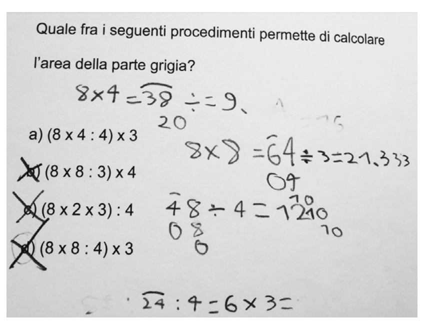
Due delle quattro opzioni (b) e d)) presentano la procedura per ottenere l'area del quadrato (8 x 8). La differenza tra le due risposte sta nell'individuare correttamente la procedura per calcolare i ¾ della superficie, in un caso si divide per 3 e si moltiplica per 4 e nell'altro si divide per 4 e si moltiplica per 3. L'inserimento del distrattore b) permette di catturare l'attenzione di quegli allievi che confondono l'ordine delle due operazioni. L'opzione a) invece prevede un errore nel calcolo dell'area: infatti scrivendo 8 x 4 si intende individuare il valore del perimetro e non dell'area come richiesto. Il distrattore c) contiene il numero 2 a differenza delle altre opzioni; la scelta degli allievi rivolta a questa opzione potrebbe essere associabile ad errori di formulazione dell'area del quadrato (8 x 2 invece di 8 x 8), oppure al numero dei quadrati piccoli grigi, oppure al numero di volte in cui è presente il numero 8 sulla figura.

Poco più di un quarto degli allievi fornisce la risposta corretta (28,4%). Un dato certamente negativo se si considera anche l'effetto di scelta casuale (scegliendo a caso tra le 4 opzioni si sarebbe raggiunta una percentuale simile). Di seguito si riporta il protocollo di un allievo che ha risposto correttamente e non si è limitato a segnare l'opzione, bensì ha risolto l'espressione individuata.



L'opzione errata più scelta è stata la a) con il 21,5% di risposte, a seguire la b) con il 17,0%. Solo il 9,5% ha scelto la terza opzione. Essendo una domanda chiusa, i protocolli da cui si può evincere la giustificazione della scelta sono pochi e non sempre facilmente interpretabili.
Sono interessanti i seguenti due casi:





L'allievo del primo protocollo a sinistra ragiona in modo corretto, seppur diverso rispetto a quello ipotizzato nelle 4 opzioni, quindi, non trovando corrispondenza con la propria procedura, sceglie di non rispondere. In questo caso, la scomposizione della figura può aver influito sulla sua risposta: ricomponendo i pezzi colorati di grigio della figura è possibile notare che l'area della parte grigia equivale all'area di tre quadrati di lato 4 cm, ossia la metà della lunghezza del lato del quadrato iniziale. L'allievo dunque somma le tre aree individuando correttamente l'espressione (4 x 4) + (4 x 4) + (4 x 4), che però non è presente in nessuna delle opzioni. Il protocollo a destra, invece, mostra come l'allievo abbia invalidato la risposta segnando più di un'opzione. È interessante osservare come egli abbia diligentemente risolto tutte e quattro le espressioni, senza però focalizzare l'attenzione sulla risposta corretta.

Seconda somministrazione.
La quasi totale mancanza di segni o scritture sul foglio o sulla figura non permette di entrare nel merito del processo risolutivo scelto dagli studenti. Per questo motivo, il quesito è stato selezionato per la seconda somministrazione agli allievi di scuola media.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	28,4%	23,0%
Risposte errate	48,0%	56,8%
Risposte mancanti senza motivazione o non valide	23,6%	16,6%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	3,6%

Dal confronto dei risultati riscontriamo che la percentuale di risposte errate date dagli allievi di prima media è più alta.
Confrontiamo in modo analitico le percentuale relative a ciascuna opzione.

Descrizione categorie errate	**Percentuale prima somministrazione (V SE)**	**Percentuale seconda somministrazione (I SM)**	**N. studenti intervistati**
a)	21,5%	20,7%	10
b)	17,0%	21,5%	6
c)	9,5%	14,6%	-
d)	28,4%	23,0%	-

L'opzione più scelta è quella corretta, nonostante sia diminuito il numero di allievi che l'hanno indicata. Le opzioni a) e b) insieme coprono circa il 40% delle risposte, mentre l'opzione c) è la meno scelta. Per indagare le motivazioni alla base delle risposte a) e b), si riportano alcuni stralci di interviste.

Gli allievi intervistati che hanno risposto a) mostrano problemi con la conoscenza o con l'applicazione della formula dell'area del quadrato (circa il 20% degli studenti), ma emerge una buona gestione della frazione come operatore. Il tipo di risposta fornito nelle interviste conferma un atteggiamento degli allievi basato sull'apprendimento mnemonico delle formule, che a volte deriva dalla prassi didattica basata sul far ricordare a memoria le formule che porta a radicare convinzioni sulla matematica: tutto ciò porta l'allievo a credere che questa disciplina vada ricordata, più che compresa. Si tratta di una pratica di memorizzazione meccanica molto efficace nel breve termine, ma fallimentare sul lungo termine, come si evince dalle risposte degli allievi intervistati. D'altronde nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) si legge:

> «Per quanto concerne in particolare il perimetro e l'area di poligoni o l'area e il volume di solidi scomponibili in parallelepipedi rettangoli, l'aspetto del calcolo è fondato sulla costruzione di formule giustificate attraverso attività, possibilmente di laboratorio, che mettono in evidenza proprietà delle figure, evitando il processo di pura memorizzazione e mobilitazione di formule preconfezionate per ogni caso particolare».
>
> (p. 159)

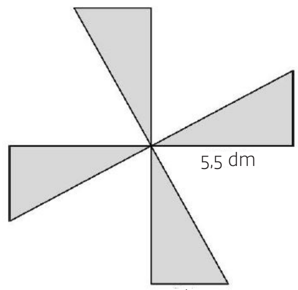
Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
a)	I.: "Questa domanda qua del quadrato. Che cosa chiede?" A. legge ad alta voce il testo. "Quindi il grigio è più del bianco." I: "Perfetto, il grigio è ¾ mentre il bianco lo sai?" A.: "¼." I.: "Benissimo." L'allievo legge la domanda. I.: "Innanzi tutto sapresti come si calcola l'area di tutto il quadrato." A.: "Sì, l'abbiamo fatto in V elementare ma non lo ricordo bene … dovrei riprendere nei classatori … in pratica penso che sia tipo 8 per 4 volte per ché è il lato." I.: "Però 8 × 4 è l'area?" A.: "Ah, no è il perimetro, l'area è dentro!" I.: "L'area come si fa?" A.: "Non me lo ricordo!" I.: "Te lo dico io: l'area del quadrato si calcola facendo lato × lato e quindi 8 × 8." A.: "Giusto! Quindi lato sotto per lato questo (indica due lati consecutivi). Quindi è giusto 8 × 8." I.: "Quale delle due?" A.: "Quindi deve essere la d)."

a)	I.: "Il problema del quadrato, questo qui, te lo ricordi?" A.: "Sì." I.: "Ti ricordi come si calcola l'area del quadrato?" A.: "Sì, lato × lato." I: "Benissimo, quindi l'area di questo quadrato qui come si trova?" A.: "8 × 4." I.: "Avevi detto lato × lato." A.: "Ah, allora 8 × 8." I.: "E come trovi l'area della parte grigia?" A.: "Facendo ¾ ." I.: "E come si fanno i ¾ ?" A.: "diviso 4 e poi per 3."

Tra gli allievi che rispondono b), invece, emerge una chiara difficoltà nel gestire la frazione come operatore ¾. Come si vede ad esempio nel seguente stralcio di intervista, l'allievo rimane in silenzio davanti alla richiesta di calcolare ¾ di 64 e nel momento in cui gli viene chiesto come ha fatto a rispondere, dichiara di essersi affidato al caso, manifestando ancora una volta un atteggiamento di fatalismo.

Risposta fornita	**Trascrizione dell'intervista**
a)	I.: "Passiamo alla domanda del quadrato. Tu hai risposto b). Intanto, come si calcola l'area del quadrato?" A.: "Lato × lato." I.: "Quindi in questo caso?" A.: "8 × 8." I.: "Ok, mi sai dire allora come si fa ¾ di 64?" A.: "¾ di 64…" silenzio. I.: "Non riesci?" A.: "No." I.: "Come hai fatto a rispondere?" A.: "Ho scelto tra questa e questa (indica b e d)."

3.1.7) Gianni ha ritagliato 4 triangoli rettangoli congruenti ed ha costruito la figura a forma di "girandola" rappresentativa:



Quale dei seguenti procedimenti gli permetterà di calcolare l'area?

a) (5,5 x 3 : 2) x 4
b) 4 x 5,5 x 3
c) 4 + (5,5 x 2)
d) 5,5 x 3 : 2

Risposta corretta: a
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
36,6%	17,9%	3,5%	26,8%	15,2%

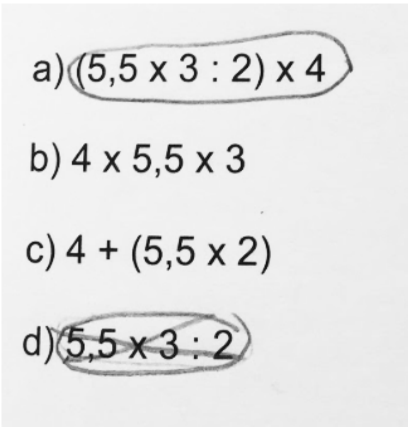
Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicira calcoli sul foglio	36,4%
L'allievo calcola l'area della figura	0,2%

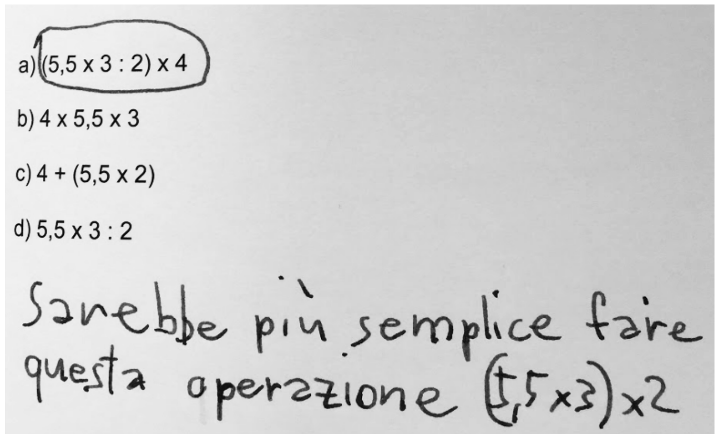
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita callcoli sul foglio	48,2%
L'allievo calcola l'area della figura	0,6%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Il quesito può essere messo in relazione al precedente, poiché anche in questo caso viene chiesto agli allievi di individuare l'espressione risolutiva di un problema. In questo caso, però, le informazioni necessarie per poter risolvere la situazione proposta sono da desumere sia dal testo verbale sia dalla figura, inoltre i contenuti necessari per rispondere sono legati agli ambiti *Geometria* e *Grandezze e misure*, in quanto riguardano la congruenza di figure e la determinazione dell'area. In particolare, per rispondere è necessario dedurre le informazioni sulla lunghezza dei lati di un triangolo dalla figura, applicare la formula dell'area di un triangolo, riconoscere la congruenza (e quindi equivalenza) dei 4 triangoli dichiarata dal testo e infine determinare l'area dell'intera figura moltiplicando l'area di un triangolo per il numero di triangoli. Questo è uno dei possibili approcci per determinare l'area ed è quello che permette di giungere alla risposta a).
Rispetto al quesito precedente, questo registra delle performance leggermente migliori, tuttavia deludenti. Il 36,6% degli studenti ha fornito una risposta corretta, mentre il 15,2% ha scelto

di non rispondere o ha fornito una risposta non valida, percentuale inferiore rispetto al quesito precedente. Certamente la posizione nel fascicolo potrebbe aver influito (diciannovesimo del secondo fascicolo), oppure l'item potrebbe essere stato percepito più semplice, non coinvolgendo il concetto di frazione. Di seguito sono riportati due protocolli di allievi che forniscono la risposta corretta.

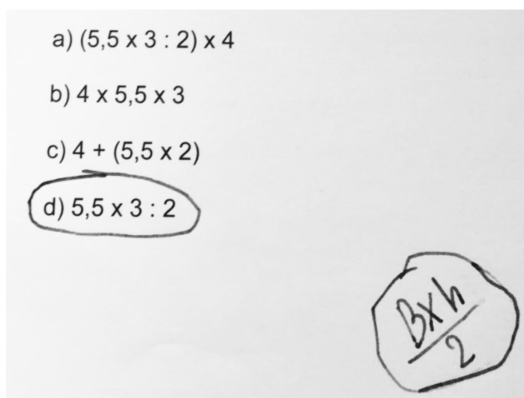




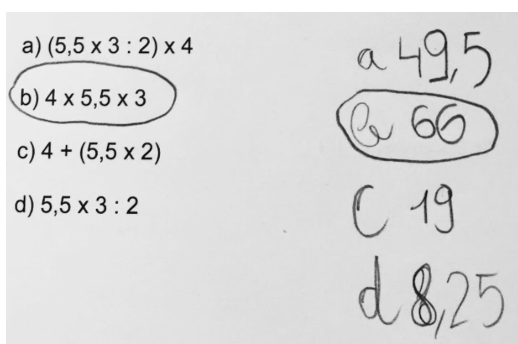
Nel primo si evidenzia un ripensamento dell'allievo che, dopo aver indicato l'opzione d), la cancella per segnare la risposta giusta. Nel secondo protocollo è invece interessante l'osservazione relativa ad una semplificazione dell'espressione, non possiamo sapere se dovuta ad un ragionamento fatto a partire dalla figura, di fatto l'area della "girandola" equivale all'area di due rettangoli costruiti componendo in modo opportuno due triangoli, o dalla rielaborazione aritmetica dei numeri.

L'opzione errata più scelta è stata la d) (26,8%), sicuramente la più vicina a quella corretta. Coloro che hanno dato questa risposta hanno individuato l'espressione che permette di calcolare l'area di un solo triangolo e non dell'intera "girandola".

A fianco si riporta il protocollo di un allievo che effettua questa scelta ed esplicita la formula nota per l'area di un triangolo. Probabilmente, partendo da questa formula ha scelto tra le espressioni quella più affine.



Nel protocollo a fianco, invece, l'allievo ha calcolato il risultato di ogni espressione e infine ha selezionato l'opzione che presentava il valore numerico maggiore.



Seconda somministrazione.
Come già detto in precedenza, nei quesiti a scelta multipla, si hanno poche informazioni sui processi messi in atto dagli studenti per determinare l'opzione di risposta. Per questo motivo, la domanda è stata somministrata agli allievi di prima media.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	36,6%	37,4%
Risposte errate	48,2%	49,4%
Risposte mancanti senza motivazione o non valide	15,2%	8,5%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	4,7%

Le risposte fornite dagli studenti in questa seconda somministrazione possono essere messe in relazione con le precedenti anche considerando la scelta delle singole opzioni.

Descrizione categorie errate	**Percentuale prima somministrazione (V SE)**	**Percentuale seconda somministrazione (I SM)**	**N. studenti intervistati**
a)	36,6%	37,4%	-
b)	17,9%	17,8%	6
c)	3,5%	3,4%	4
d)	26,8%	28,2%	-

Le percentuali nelle due somministrazioni sono molto simili. Di seguito si riportano le trascrizioni di alcune interviste.

La scelta dell'opzione b) sembra collegata a difficoltà di conoscenza e applicazione della formula dell'area del triangolo. In tale opzione compare il prodotto dei tre numeri presentati nello stimolo del compito che vengono collegati tra loro tramite delle operazioni.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
b)	I.: "Guardiamo la domanda della girandola; tu hai scelto la b), come mai?" A.: "Mi chiede l'area di questi qui tutti insieme." I.: "E cosa sono?" A.: "Dei triangoli rettangoli." Lungo silenzio. I.: "Tu hai risposto b), perché?" Silenzio. I.: "Mi sai dire come si calcola l'area di un triangolo?" A.: "Si fa base per altezza diviso 2." I.: "Tu hai scelto questo, perché?" A.: "Noooo." I.: "Perché no?" A.: "Manca il diviso due!"
b)	I.: "Questa domanda qua cosa ti chiedeva? Come mai hai risposto b)?" A.: "Questi triangoli sono congruenti." I.: "Congruenti sai cosa significa?" A.: "Identici. Gianni ha costruito la girandola. Io devo calcolare l'area. Quindi questo è 5,5 e c'è 3 e quindi ho fatto 4 angoli, per 5,5 e per 3." I.: "Cosa ti permette di calcolare questo 5,5 per 3?" Silenzio. I.: "Come si calcola l'area del triangolo?" Silenzio. A.: "Non me lo ricordo."

La scelta della risposta c), invece, sembra essere legata, oltre a difficoltà di conoscenza della formula dell'area del triangolo, anche ad un atteggiamento di lettura selettiva, e a difficoltà di comprensione delle informazioni presenti nello stimolo (in particolare, la comprensione della domanda posta e del significato del termine "congruente").

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
c)	I.: "Vediamo questo della girandola." A. legge ad alta voce. I.: "Tu cosa hai risposto?" A.: "La c), perché ci sono 4 triangoli. La lunghezza della base è 5,5 dm e l'altezza è 3 dm e quindi devi calcolare base per altezza." I.: "Base per altezza?" A.: "Sì, per il triangolo. Ah no, base per altezza diviso due!" I.: "Bene, proviamo a calcolare l'area di uno di questi triangoli, la base c'è?" A.: "Sì." I.: "Quanto è lunga?" A.: "5,5." I.: "Ok; l'altezza?" A.: "è questa (indica 3 dm)." I.: "Ok, quindi?" A.: "5,5 x 3 : 2; e quindi è questa (indica la risposta d)." I.: "Ma cosa ti chiedeva il quesito?" A.: "Di trovare l'espressione per calcolare l'area del triangolo." I.: "Aspetta proviamo a rileggere." L'allievo legge ad alta voce. "Ah quindi di tutta la girandola." I.: "E quindi quale faresti?" A.: "Ah, questa." (indica l'opzione a)).
c)	I.: "Come mai hai scelto la c)?" A.: "A dire il vero questa qua non è che la sapevo bene … perché non capivo quanto erano le altre (si riferisce alle dimensioni poiché indica i lati del triangolo dove è esplicitata la lunghezza di uno dei lati)." I.: "Sei sicuro che non lo sai?" A.: "No, non c'è scritto." I.: "Se leggi parla di triangoli congruenti, tu sai cosa significa questa parola?" A.: "No." I.: "Congruenti significa uguali, identici." A.: "Ah." I.: "Adesso sapresti rispondere?" A.: "Faccio 5,5 × 2 più 3 decimetri." I.: "Ti ricordi come si calcola l'area del triangolo?" A.: "No, del triangolo no, ma del trapezio si!" I.: "Ah, del trapezio si? E qual è?" A.: "Base minore più base maggiore per altezza diviso due!" I:. "Bravo."

3.1.8)

Ognuno dei libri rappresentati ha uno spessore di 3,8 cm: 3 cm sono di pagine interne e due volte 4 mm corrispondono allo spessore delle copertine.
Quali di questi ti permette di stabilire l'altezza dei 10 libri impilati? Indica le possibili risposte con una crocetta.

a) 3,8 x 10
b) (0,4 x 10) + (3,6 x 10)
c) (3 x 10) + (0,8 x 10)
d) (0,4 x 10) + (3 x 10)

Risposta corretta: a – c
Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
9,8%	58,3%	31,9%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita calcoli sul foglio	9,6%
L'allievo svolge qualche calcolo sul foglio	0,2%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica solo a) come risposta	34,5%
L'allievo indica solo c) come risposta	10,0%
L'allievo indica solo d) come risposta	5,9%
L'allievo indica solo b) come risposta	4,9%
L'allievo indica b) e d) come risposta	1,4%
Altre combinazioni	1,6%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Il quesito chiede di individuare l'espressione risolutiva di un problema verbale che descrive una situazione reale. In particolare, si tratta di scegliere tra le espressioni presentate quelle che permettono di determinare l'altezza di 10 libri posizionati uno sopra l'altro, conoscendo la misura dello spessore delle pagine e della copertina. In questo caso l'immagine riveste un ruolo di facilitatore perché mostra la posizione dei libri e permette agli allievi di avere un supporto grafico per aiutare il conteggio.

Il quesito è strutturato come se fosse una domanda a risposta chiusa, per la quale di solito è richiesto di fornire una sola opzione tra le quattro presenti. In questo caso però l'opzione corretta non è unica; perché la risposta sia considerata giusta, l'allievo deve indicare entrambe le opzioni a) e c). Questo potrebbe aver condotto gli allievi in errori, dato che si ipotizza che diversi abbiano fornito come risposta corretta la prima individuata e si siano fermati nella ricerca e nel controllo delle altre. In generale, i quesiti che prevedono più opzioni di risposta creano spesso difficoltà e registrano una bassa percentuale di risposte corrette, con un'alta percentuale di risposte parziali. Solo il 9,8% degli allievi ha risposto correttamente, inoltre, il 31,9% non ha fornito alcuna risposta. Il quesito è il quarantunesimo del secondo fascicolo. Osservando i fascicoli degli studenti, non si trovano tracce di calcoli, schemi o grafici che diano informazioni sul processo risolutivo attivato.

Come ipotizzato, la maggior parte degli allievi che ha sbagliato indica come opzione solo la a) (34,5%): la domanda può essere stata facilmente confusa con una a risposta chiusa, per la quale si richiede invece una sola scelta. Per questo motivo si consiglia in futuro di sottolineare maggiormente (con un carattere in grassetto o sottolineato) la richiesta di più di una possibilità per riuscire ad avere un dato depurato da eventuali incomprensioni sulla tipologia di quesito. Inoltre, la prima opzione, 3,8 x 10 è probabilmente quella più immediata perché prevede la moltiplicazione dello spessore di un libro per il numero di libri, quindi presumibilmente una volta individuata questa risposta, alcuni allievi non hanno continuato l'analisi delle altre opzioni.

Il 10,0% degli allievi indica solo l'opzione c) che traduce attraverso un'espressione aritmetica la somma dello spessore delle pagine di 10 libri e lo spessore delle copertine di 10 libri, due ciascuno.

Più del 50% degli studenti del campione ha quindi individuato almeno una delle opzioni corrette.

Il 5,9% degli allievi indica l'opzione d) che si differenzia da quella corretta per il fatto che si considera lo spessore di una sola copertina per libro differentemente da quanto mostrato nell'immagine e da quanto esplicitato nel testo "due volte 4 mm".

Il 4,9% degli allievi risponde b) e l'1,4% indica entrambe le risposte b) e d). Le altre combinazioni risultano poco rilevanti.

3.1.9) Miriam compra 300 g di prosciutto, che costa 30 Fr. al kg. Quali di questi calcoli le permette di sapere quanti franchi spende?

a) 300 : 30
b) 30 : 300
c) 30 x 0,3
d) 30 x 300

Risposta corretta: c
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
37,4%	5,7%	25,6%	17,1%	14,2%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicira calcoli sul foglio	24,2%
L'allievo svolge qualche calcolo sul foglio	1,4%

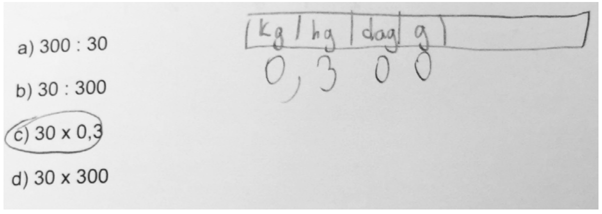
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita callcoli sul foglio	60,2%
L'allievo svolge qualche calcolo sul foglio	0,6%

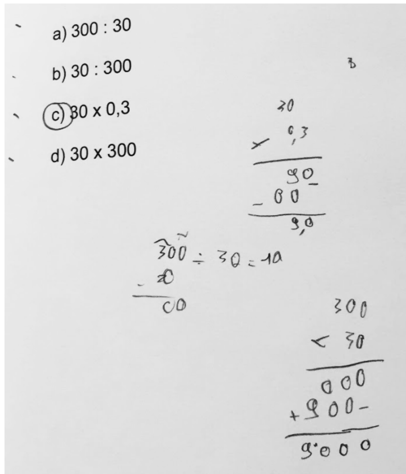
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Il quesito, a risposta chiusa dove una sola delle opzioni è corretta, è il venticinquesimo del secondo fascicolo. La situazione descritta è di vita quotidiana, anche se potrebbe essere distante dal vissuto degli allievi, e chiede, partendo dal prezzo al kg del prosciutto, di indicare l'operazione corretta per trovare il costo di 300 g. L'allievo dunque deve individuare il processo risolutivo e non il risultato finale.

Il quesito non è stato percepito difficile come altri, infatti "solo" il 14,2% degli allievi non risponde, ma in ogni caso non registra una buona performance. Il 25,6% degli allievi fornisce la risposta corretta c), che contiene un numero non presente nel testo in modo esplicito (0,3), bensì ottenuto da una trasformazione. Questo aspetto potrebbe aver influito sulla non scelta di tale risposta. Inoltre, 0,3 è un numero decimale, una tipologia che solitamente porta con sé diverse misconcezioni nella scelta dell'operazione risolutiva, come mostreremo in seguito.

Due opzioni di risposta coinvolgono come operazione risolutiva la moltiplicazione, mentre le altre due la divisione. Un possibile ragionamento corretto potrebbe essere quello di trasformare i 300 g in 0,3 kg e adottare una strategia proporzionale: il prezzo di un kg di prosciutto per i kg di prosciutto, in questo caso 0,3. Questo procedimento conduce all'opzione c). Di seguito si riportano alcuni protocolli di allievi che forniscono la risposta corretta. Il primo esplicita la trasformazione eseguita, mentre il secondo fonda la sua scelta sul risultato delle operazioni indicate. Si noti che la seconda divisione non è stata svolta.





Una delle difficoltà che può aver indotto in errore gli allievi è la tipologia di numeri presenti e le relazioni tra loro esplicitate nelle varie opzioni. L'opzione più scelta è stata la prima (37,4%), che indica l'operazione 300 : 30, quindi una divisione invece di una moltiplicazione. Da questo punto di vista, la ricerca mostra come nella risoluzione di un problema siano spesso i tipi di numeri e le loro relazioni a trarre in inganno nella scelta della procedura risolutiva (D'Amore & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005; 2009).
L'opzione corretta c) è infatti legata ad una moltiplicazione che spesso viene associata ad un accrescimento anche se i numeri sono razionali, come in questo caso. Ossia molti allievi ipotizzano che moltiplicando 30 x 0,3 si ottenga un numero più grande di 30 e ciò potrebbe essere in contrasto con ciò che ipotizzano possibile per questa situazione. Questo potrebbe aver spinto gli allievi a scegliere una divisione come operazione risolutiva. Inoltre, coerentemente con il modello intuitivo che spesso si incontra nei ragionamenti degli allievi, gli studenti possono aver scelto una divisione dove il divisore deve essere minore del dividendo (37,4%), piuttosto che viceversa. Infatti, l'opzione b) che indica l'operazione 30 : 300 è stata scelta solo dal 5,7% degli allievi.

In quest'ottica può essere didatticamente vincente nascondere tutti o una parte dei numeri quando viene proposto un problema, concentrandosi solamente sul procedimento risolutivo e non sull'algoritmo da applicare (Fischbein, 1985b; Sbaragli, Cottino, Gualandi, Nobis, Ponti, & Ricci, 2008a; Sbaragli, 2009). Inoltre, come suggerisce Fischbein (1985a), per superare l'ostacolo intuitivo creato da un problema, si può ricorrere «a una classe di problemi collegati ad esso per analogia, ma i cui dati numerici vadano d'accordo con le richieste intuitive».

La seconda opzione errata più scelta è stata la risposta d) (17,1%) in cui si moltiplicano i due numeri, ma non si tiene conto delle unità di misura.

Seconda somministrazione.
La domanda è stata somministrata agli allievi di prima media. Di seguito si riportano i risultati confrontabili con quelli della prima somministrazione.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	Percentuali seconda somministrazione (I SM)
Risposte corrette	25,6%	24,7%
Risposte errate	60,2%	66,2%
Risposte mancanti senza motivazione o non valide	14,2%	8,0%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	1,1%

Le risposte fornite dagli studenti in questa seconda somministrazione possono essere messe in relazione con le precedenti anche considerando la scelta delle singole opzioni.

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
a)	37,4%	42,0%	10
b)	5,7%	8,1%	2
c)	25,6%	24,7%	-
d)	17,1%	16,1%	3

Di seguito si riportano le trascrizioni di alcune interessanti interviste.

Dalle seguenti due interviste si evince che chi ha scelto l'opzione a) ha valutato numericamente l'ipotetico risultato che avrebbe dovuto ottenere, di certo inferiore a 30, in quanto la quantità di prosciutto è inferiore al chilo. Questa considerazione, peraltro giusta, trova riscontro in una scelta scorretta dell'operazione dettata da una tipica misconcezione presente negli allievi e già ipotizzata: "la moltiplicazione accresce sempre" e "la divisione diminuisce sempre".

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
a)	I.: "Vediamo questa domanda ..." (legge il testo). A.: "30 franchi di sicuro non li spende perché non è ancora arrivato a un chilo". I.: "Benissimo, quindi ci aspettiamo che spenda qualcosa di meno." A.: "Esatto." I.: "Qui c'è il risultato finale o solo l'operazione che dobbiamo eseguire?" A.: "L'operazione." I.: "Quindi non ci interessa sapere quanto realmente spende ma vogliamo solo sapere come calcolarlo. Quindi come possiamo fare?" A.: "Io ho messo questo perché sembrava il più ovvio, di sicuro "per" non penso che poteva essere." I.: "Perché?" A.: "Perché se pesa 300 g non è nemmeno un chilo. Se fai 300 x 30 arrivi a ..." I.: "Sì è tanto! Pensa che arrivi a 9000 franchi per 300 g di prosciutto!" A.: "Allora ho provato con il diviso."

a)	I.: "Perché hai scelto proprio la a)? Vedo che tu ragioni molto sulle opzioni da scegliere." A.: "Perché c'era 300 : 30 e secondo me era quella." I.: "Era quella più ragionevole tra tutte?" A.: "Sì." I.: "E perché non il "per" e il diviso sì?" A.: "Perché il "per" aumenta, quindi costerebbe di più, invece il diviso diminuisce." I.: "Ah, ho capito, quindi tu dici: se il prezzo è al chilo, io non ho preso un chilo ho preso meno quindi devo trovare un'operazione che mi dia meno." A.: "Esatto il "per" non andrebbe bene." I.: "Quindi hai escluso il "per" e hai scelto il diviso." A.: "Però non si può fare 30 : 300." I.: "Ah invece tu dici 300 : 30 lo so fare e quanto fa?" A.: "Non lo so ma è l'unico che andava bene."

Le ricerche in didattica della matematica hanno evidenziato l'insorgere negli allievi di modelli parassiti fin dai primi anni di scuola elementare che spesso non vengono superati negli anni successivi. Gli allievi, dopo aver accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra naturali, dove il prodotto è sempre maggiore o uguale ai due fattori, tra l'altro rafforzato dalle raffigurazioni schematiche per schieramento, hanno erroneamente esteso questo modello alle moltiplicazioni in ogni campo numerico (in $\mathbb{Q}$ in questo caso) (D'Amore & Sbaragli, 2005). Il modello che risulta "parassita" nell'insieme $\mathbb{Q}$, risulta quindi di ostacolo per la risoluzione di questo tipo di problemi. Analogo è il modello "parassita" della divisione che "diminuisce sempre". Inoltre, per quanto concerne questa operazione, se non si è particolarmente attenti alla problematica, si può correre il rischio di dare all'allievo un altro modello intuitivo che finirà con il produrre un modello indesiderato: in una divisione A : B, il numero B deve essere minore del numero A, come si evince dal ragionamento dell'allievo nella seconda intervista (Fischbein, 1985a; Deri, Sainati Nello, & Sciolis Marino, 1983; D'Amore 1999).

Riassumendo, come evidenzia Fischbein (1985a; 1992a, 1992b) citato in D'Amore & Sbaragli (2005, p. 151):

> «Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no».

3.2. Dal testo di un problema a possibili domande

3.2.1) Un furgone trasporta 50 casse con 12 bottiglie ognuna. In un incidente si rompono 25 bottiglie. A quali domande si può rispondere con questi dati?
Indica le possibile domande con una crocetta.

a) Quante bottiglie restano intere?
b) Quante casse contengono delle bottiglie rotte?
c) Quante casse trasporta il furgone al mese?
d) Quante bottiglie trasporta il furgone al momento della partenza?

Risposta corretta: a – d
Risultati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
15,9%	60,2%	23,9%

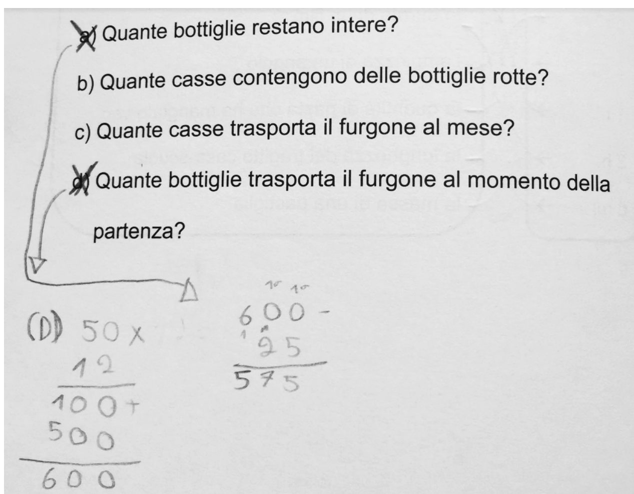
Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare procedimenti o rappresentazioni	15,1%
L'allievo propone una risposta corretta mostrando l'operazione necessaria per rispondere alle domande indicate	0,8%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica solo l'opzione a)	30,9%
L'allievo indica le opzioni a), b) e d)	8,1%
L'allievo indica le opzioni a) e b)	7,1%
L'allievo indica solo l'opzione d)	5,7%
L'allievo indica solo l'opzione b)	4,5%
L'allievo indica altre combinazioni	1,7%
Altro	2,2%

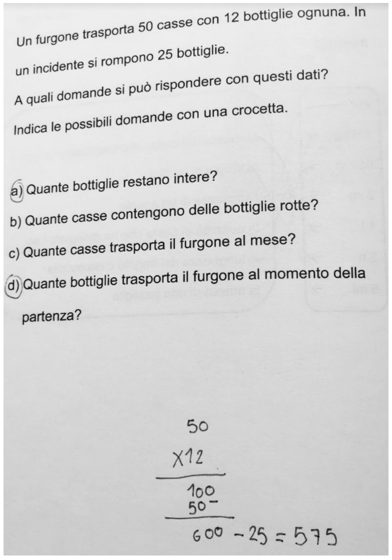
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Ricavare informazioni da una situazione aritmetica espressa in varie forme (linguistica, grafica, ecc.).

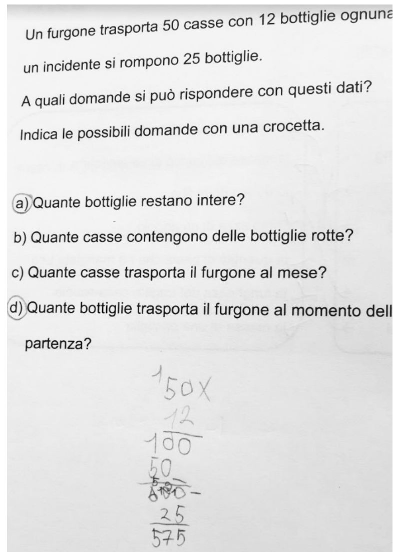
Il quesito è il trentaseiesimo del primo fascicolo e registra il 23,9% di risposte mancanti. Esso chiede di individuare a quale tra le domande inserite nelle opzioni può essere fornita una risposta a partire dalle informazioni presenti nel testo. Assume quindi fondamentale importanza l'interpretazione e la comprensione del testo linguistico fornito e del ruolo dei dati numerici. Nonostante il quesito appaia come una domanda a risposta chiusa (una sola opzione), prevede la scelta di più di una opzione. Alla prima domanda si può rispondere sottraendo dal numero totale di bottiglie (50 x 12) il numero di quelle rotte (12); alla seconda non è possibile fornire una risposta, in quanto a partire dai dati non si sa che disposizione hanno le bottiglie che si rompono nelle casse; lo stesso avviene per la terza, dal momento che non ci sono riferimenti nel testo che facciano ipotizzare il trasporto mensile; invece, alla quarta si può fornire una risposta individuando il numero di bottiglie alla partenza, 600, tramite l'operazione 50 x 12.

La risposta considerata corretta prevedeva la scelta di entrambe le opzioni a) e d); al quesito risponde correttamente il 15,9% degli allievi. Nei seguenti protocolli gli allievi non si limitano a segnare le opzioni giuste, bensì mostrano ed eseguono il calcolo necessario per fornire la risposta. Questo comportamento può dipendere dal bisogno di verificare ciò che si è dichiarato o dalla necessità di giustificare formalmente una risposta, anche se non richiesto esplicitamente dal quesito, a causa di una clausola del contratto didattico instaurata in classe, detta *esigenza della giustificazione formale* (già menzionata a pagina 52): «L'esigenza è tale non per un bisogno intrinseco dell'allievo, ma per una sua interpretazione del modello generale di problema e di comportamenti al riguardo, che si suppongono attesi da parte degli insegnanti» (D'Amore & Sandri, 1998, p. 14). Come affermano D'Amore e Sandri (1998, p. 13): «solo la presenza di qualche calcolo sembra ridare la dignità necessaria al loro compito».



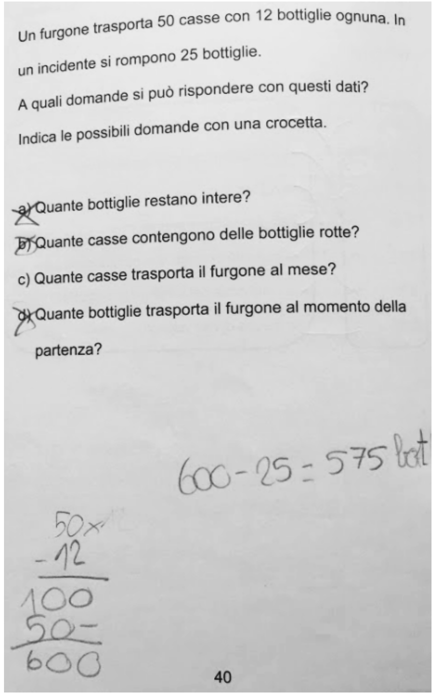
I protocolli seguenti mostrano anche un'erronea abitudine che si riscontra spesso, basata sull'eseguire operazioni concatenate (in questo caso addirittura in colonna), utilizzando l'uguale in senso procedurale, invece che in senso relazionale; ciò comporta il perdere di vista il giusto significato del fondamentale concetto di uguale (Kieran, 1988; Camici, Cini, Cottino, Dal Corso, D'Amore, Ferrini, Francini, Maraldi, Michelini, Nobis, Ponti, Ricci, & Stella, 2002). In questo specifico caso, è come se 500 x 12 fosse uguale a 575. Come già esplicitato in Sbaragli e Franchini (2014), è stato ampiamente rilevato dalla ricerca internazionale, ritenuta oramai classica, che, nei confronti dell'uguaglianza, lo studente ha un comportamento cognitivo diverso da quello atteso dall'insegnante: mentre il docente pensa all'uguaglianza come ad una relazione binaria di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva), lo studente la vede fin dalla scuola elementare (e poi non se ne discosta più, anche se acquisisce altri usi ed altre interpretazioni dello stesso concetto) come un "segno direzionale", orientato da sinistra verso destra, dunque un indicatore procedurale che ha a sinistra gli "operandi" e a destra (preferibilmente) un numero unico, il "risultato". Così si perde totalmente la simmetria dell'uguaglianza. Questa consuetudine, spesso associata dall'insegnante ad una distrazione dell'allievo o ad una esecuzione sbrigativa e frettolosa del calcolo, potrebbe sfociare in grosse difficoltà nei livelli scolastici successivi, inibendo ad esempio l'apprendimento della risoluzione ragionata e cosciente delle equazioni. Tale erroneo utilizzo dell'uguale si può rilevare anche nel quesito 3.3.1 (p. 85).





Le percentuali di insuccesso degli allievi risultano essere molto elevate (60,2%) e questo potrebbe essere riconducile ad almeno due fattori. Il primo è che il quesito è strutturato come se fosse una domanda a risposta chiusa, per la quale di solito è richiesto di fornire una sola opzione. Questo potrebbe aver condotto gli allievi a fornire come risposta la prima domanda corretta individuata e a fermarsi nella ricerca e nel controllo delle altre, così come già è stato osservato nel quesito analogo 3.1.8. Il 30,9%, dunque circa la metà di coloro che hanno sbagliato, forniscono infatti come risposta solo l'opzione a). L'altra motivazione potrebbe essere legata al tipo di richiesta. Le situazioni-problema che gli allievi si trovano tradizionalmente ad affrontare in classe partono da uno stimolo e da una domanda a cui si deve rispondere, mentre in questo caso agli allievi è chiesto di individuare a quali domande si può rispondere in base alle informazioni fornite. Il processo che li porta a fornire una risposta non è di fatto riproduttivo di una prassi abituale (comprensione di una situazione, individuazione del procedimento risolutivo, eventuale esecuzione di algoritmi ed esplicitazione di una risposta), bensì richiede una profonda analisi della situazione e un atteggiamento critico di fronte alle possibili domande. Un quesito di questo tipo è quindi molto interessante da un punto di vista didattico: viene infatti mostrato come per uno stesso stimolo si possono porre diverse possibili domande.

Tra le altre due opzioni scorrette la più scelta è stata la b): il 4,5% degli allievi la sceglie come unica risposta, l'8,1% in aggiunta alle opzioni a) e d) e il 7,1% insieme all'opzione a). L'opzione c) viene scelta raramente (1,7% altre combinazioni) anche perché si fa riferimento ad un periodo temporale ("al mese") che non viene specificato nel testo. Si riporta di seguito un protocollo di un allievo che ha fornito la risposta errata, ma ha esplicitato i calcoli che sono serviti per rispondere alle domande a) e d). Non ci sono riferimenti alla procedura per rispondere alla domanda b), ma l'allievo sceglie comunque di indicarla.


Un furgone trasporta 50 casse con 12 bottiglie ognuna. In un incidente si rompono 25 bottiglie.
A quali domande si può rispondere con questi dati?
Indica le possibili domande con una crocetta.

a) Quante bottiglie restano intere?
b) Quante casse contengono delle bottiglie rotte?
c) Quante casse trasporta il furgone al mese?
d) Quante bottiglie trasporta il furgone al momento della partenza?

600 - 25 = 575 bot

50 ×
12
100
50 -
600

40

Seconda somministrazione.
Il quesito è stato proposto anche agli studenti di prima media. Nella tabella seguente sono riportati i risultati delle due somministrazioni a confronto.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	15,9%	20,1%
Risposte errate	60,2%	73,6%
Risposte mancanti senza motivazione	23,9%	4,6%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	1,7%

Osserviamo che nelle due somministrazioni c'è un grande divario nelle percentuali di risposte mancanti, essendo un quesito piuttosto in fondo al fascicolo, infatti, molti allievi nella prima somministrazione non sono riusciti a leggerlo. Un altro dato interessante è che, pur avendo avuto il tempo di leggere con attenzione la domanda, solo il 20,1% ha risposto correttamente e circa 3 su 4 hanno dato una risposta errata. Nello specifico riportiamo di seguito le percentuali di risposte errate:

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo indica solo l'opzione a)	30,9%	35,6%	8
L'allievo indica solo l'opzione d)	5,7%	4,0%	1
L'allievo indica solo l'opzione b)	4,5%	6,9%	0
L'allievo indica le opzioni a), b) e d)	8,1%	18,4%	8
L'allievo indica le opzioni a) e b)	7,1%	6,3%	2
L'allievo indica altre combi-nazioni	1,7%	2,4%	2
Altro	2,2%	-	-

Le percentuali delle due somministrazioni presentano alcune differenza; quelle maggiori si riscontrano nella scelta della sola opzione a) (30,9% - 35,6%) e delle opzioni a), b) e d) (8,1% - 18,4%). Gli allievi di prima media che hanno fornito una risposta in più rispetto a quelli di quinta elementare hanno scelto maggiormente questi due tipi di risposte scorrette. Anche per questo quesito le interviste hanno permesso di far luce sui ragionamenti celati dietro queste scelte.

Dalle interviste seguenti si deduce che alcuni allievi (presumibilmente la maggior parte) che hanno indicato solo l'opzione a) hanno inteso il quesito come una sola risposta a scelta multipla, quindi una volta individuata quella considerata corretta, non hanno ritenuto di dover indagare il resto delle opzioni, pur riuscendo potenzialmente a distinguere le domande a cui era possibile rispondere da quelle a cui non lo era.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
a)	Dopo aver indagato su tutte le altre opzioni l'allieva decide che anche alla domanda dell'opzione d) era possibile rispondere. I.: "Perché non l'hai scelta? Perché hai letto veloce o perché credevi ci fosse una sola risposta?" A.: "Perché credevo che ci fosse una sola risposta." I.: "Ma qui c'era scritto le possibili ..." A.: "Sì infatti ho fatto un po' veloce."

a)	I.: "Quante bottiglie trasporta il furgone al momento della partenza si può sapere?" A.: "Ehm sì, ma devo fare un calcolo." I.: "Ah si può sapere allora?" A.: "Allora tu devi fare un calcolo, puoi fare un calcolo, non sono sicuro, devi fare 50 ..." I.: "Non mi interessa il calcolo ora, voglio solo sapere se secondo te si può fare." A.: "Si può fare!" I.: "Ok quindi bisognerebbe scegliere anche questa opzione?" A.: "Sì, ma non ero tanto convinto che era questa, che non era la d) la risposta giusta, ero più convinto di quante bottiglie restavano intere." I.: "Però attento il quesito ti dice indica le possibili domande mica solo una?" A.: "Ah ma allora non avevo capito!"

L'altro errore molto frequente è stato quello di segnare oltre all'opzione a) e d) anche la b). Dalle interviste si evince che questi allievi ipotizzano che tutte le bottiglie in una data cassa si rompono, questo comporta che, essendo 25 le bottiglie rotte in tutto, sono due le casse che contengono bottiglie tutte rotte, più una bottiglia in un'altra cassa. In alcuni casi dichiarano direttamente tre casse.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
a), b) e d)	I.: "E alla domanda b) come rispondi?" L'allievo legge l'opzione. A.: "Se ogni cassa ha 12 bottiglie devi fare per due poi ne avanza una, quindi sono due casse e una bottiglia." I.: "Ma si deve rompere per forza una cassa intera?" A.: "Ah ok!" I.: "Non può essere che in una cassa se ne rompono due in una cassa una sola bottiglia e così via?" A.: "Sì." I.: "Se fosse così potresti rispondere a questa domanda?" A.: "No."

a), b) e d)	I.: "Perché hai scelto la domanda b)?" A.: "Quante casse contengono le bottiglie rotte? Sono tre casse. Perché 25 : 2 fa 12, due casse, poi ne resta una, no scusa, 24 : 2 fa 12 poi c'è ancora una bottiglia rotta". I.: "Ma quindi tu sei sicuro che si rompa tutta una cassa intera?" A.: "No." I.: "Tu mi hai detto che si rompono le bottiglie di tre casse, giusto?" A.: "Ma in una cassa se ne rompe una sola." I.: "Ok, ma per forza però due casse intere si sono rotte nell'incidente." A.: "Sì." I.: "Ma secondo te nella realtà può accadere?" A.: "Eh beh ma dipende, a volte i problemi non sono molto realistici." I.: "Spiegami meglio questa cosa." A.: "Cioè se uno fa un problema matematico non deve per forza assomigliare alla realtà." I.: "Quindi se leggessi sul giornale che un furgone ha rotto 25 bottiglie penseresti che vengono tutte da una stessa cassa o no?" A.: "No no!" I.: "Invece nel modo della matematica? A.: "Sì. Eh, perché intendevo le casse come quantità…"

Dalle affermazioni si riscontra un particolare effetto del contratto didattico, a lungo studiato, per cui si evidenzia che «i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare *stricto sensu* con la matematica, ma che dipendono dal contratto didattico instaurato in classe» (D'Amore, 1999, p. 111). A questo proposito è di particolare interesse una ricerca sui problemi con dati mancanti e sugli atteggiamenti degli allievi di fronte a problemi di questo tipo (D'Amore & Sandri, 1998) nella quale i bambini inventano dati e informazioni anche se non presenti nel testo del problema. In particolare nella ricerca vengono presentati i risultati del seguente problema consegnato in una III elementare (allievi di 8-9 anni) ed in una II media (allievi di 12-13 anni): «Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?» (p. 58). In III elementare il 58,4% degli allievi risponde Giovanna, giustificando con il presupposto che probabilmente Giovanna e Paola partivano dalla stessa somma. L'allievo inventa implicitamente una informazione verosimile che gli è utile per fornire una risposta. In II media la percentuale di risposte "Giovanna" scende al 24,4%, ma solo il 63,5% di questi allievi denuncia in qualche modo l'impossibilità di dare una risposta.

Nell'ultimo stralcio di intervista, l'allievo esprime, inoltre, una considerazione molto interessante relativamente alla contrapposizione tra realtà e matematica. A questo riguardo sono illuminanti le ricerche condotte per anni da Zan nell'ambito dei problemi (1998). In esse si evidenzia come i bambini distinguano tra problema reale concreto, quello legato alla vita reale extra-scolastica, dal problema scolastico. Quando nelle ore di matematica ci si riferisce ad un problema, si intende di solito qualcosa di artificioso, prefabbricato, con caratteristiche proprie, assolutamente in contrapposizione con quello che avviene nella realtà. Lo stesso D'Amore (1999) osserva che «gli *stessi* bambini, in un contesto diverso da quello classe, alla stessa proposta di problema, non danno più la risposta detta, ma mettono in evidenza la incongruità fra i dati e la richiesta» (p. 106).

3.3. Dal processo risolutivo al testo di un problema

3.3.1) Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo?

a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?
b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?
c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio?
d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro.

Risposta corretta: b
Risultati:

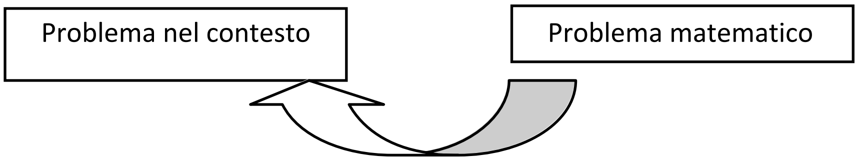
a	b	c	d	Mancante / non valida
4,3%	65,0%	6,1%	8,1%	16,5%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare il procedimento	62,8%
L'allievo propone una risposta corretta risolvendo almeno uno dei problemi	2,2%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita procedimenti sul foglio	20,5%
L'allievo risolve almeno uno dei problemi	2,4%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

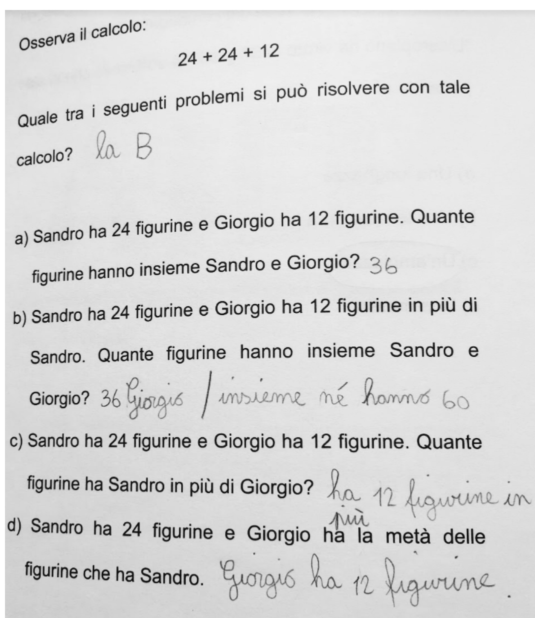
Il quesito è il dodicesimo del primo fascicolo e registra il 16,5% di risposte mancanti. Esso richiede la traduzione da un'espressione aritmetica che coinvolge l'addizione fra tre termini ad un testo di un problema espresso in linguaggio verbale che possa essere risolto tramite tale espressione. Dunque lo scopo della domanda riguarda esplicitamente un passaggio un po' inconsueto dal punto di vista didattico, ossia saper interpretare il linguaggio della matematica e saperlo rileggere come procedimento risolutivo di un testo verbale da scegliere tra quattro proposte, così da favorire il passaggio dal registro simbolico (rappresentazione della soluzione attraverso segni e simboli matematici) a quello verbale e viceversa. Tale quesito può essere letto nel ciclo della matematizzazione di Figura 2 (vedi p. 19) come un percorso in senso inverso del processo *formulare* della matematizzazione orizzontale, in questo caso dal problema matematico al problema nel contesto.



I primi tre testi proposti come opzioni contengono esplicitamente una domanda, mentre nell'ultimo questa non è presente, e ciò potrebbe essere fuorviante per gli allievi, in quanto non è precisato come interpretare la situazione proposta e come associarla con l'espressione aritmetica. Nelle prime tre opzioni sono presenti le parole chiave che spesso gli allievi associano all'operazione di addizione ("in più", "insieme"), ma che conducono a volte anche in errore (come approfondito nel paragrafo 2.3.). È però richiesto di interpretare ciascuno di questi problemi per capire quale è effettivamente risolvibile con l'espressione mostrata. In questo senso, il quesito è interessante dal punto di vista della struttura, dato che una sua risoluzione corretta presuppone una comprensione e modellizzazione dei vari stimoli proposti. La risposta corretta è la b) dove nel testo sono presenti le locuzioni "in più" e "insieme" che potrebbero in questo caso essere di aiuto. Invece, per risolvere la situazione a) è sufficiente sommare il numero di figurine di Sandro e di Giorgio (24 + 12). Stessa cosa accade per la situazione c) per la quale basta effettuare la sottrazione 24 - 12, nonostante sia presente la locuzione "in più"; invece, nella situazione d) non è esplicita la domanda, quindi a priori non è possibile associare con certezza alcuna espressione numerica.

In generale, il quesito registra una discreta performance degli allievi, il 65,0% risponde correttamente; di questi il 62,8% non mostra dei calcoli sul foglio, mentre il restante 2,2% sì.

Di seguito, riportiamo un protocollo di un allievo che risolve ciascun problema riportando le diverse risposte e riuscendo così a stabilire quale situazione può essere modellizzata tramite l'espressione proposta. In particolare, l'allievo risponde in modo corretto ai quesiti posti dalle prime tre opzioni e ipotizza una possibile risposta per il quarto problema, pensando che la domanda possa essere "Quante figurine ha Giorgio?". Questo gli permette di individuare la scelta corretta.


Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo? la B

a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio? 36

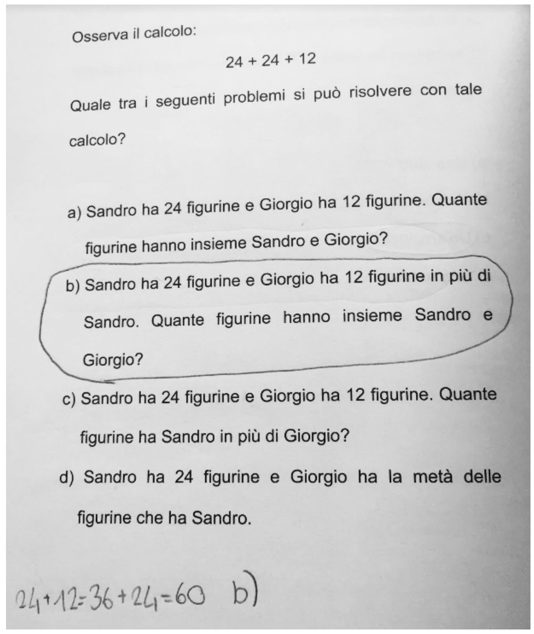
b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio? 36 Giorgio / insieme né hanno 60

c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio? ha 12 figurine in più

d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro. Giorgio ha 12 figurine.

Il protocollo a fianco mostra invece come un altro allievo abbia deciso di esplicitare solo il calcolo relativo alla risposta individuata corretta.

In questo caso la sequenza delle operazioni indicate (24 + 12 = 36 + 24 = 60) mostra il classico errore commesso dagli allievi di fornire al simbolo "=" un significato prettamente procedurale, invece di relazionale; (errore già esplicitato a p. 80 nel caso di algoritmi in colonna). In questo caso, dal calcolo esplicitato dal protocollo, 36 risulterebbe uguale a 60.


Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo?

a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?

b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?

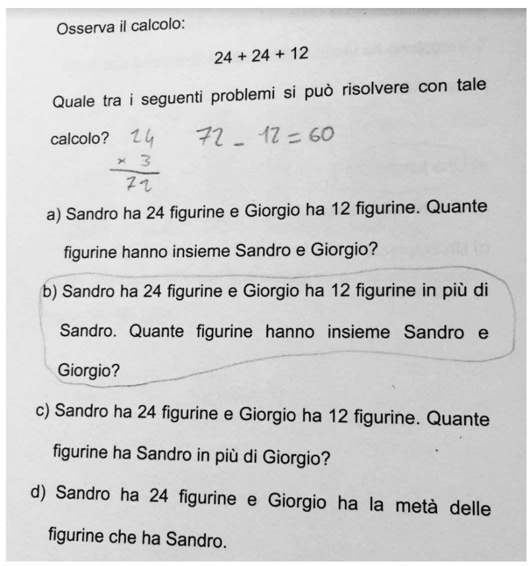
c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio?

d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro.

24+12=36+24=60 b)

Sebbene formalmente ci sia questo errore, che è importante correggere prima possibile per evitare difficoltà nei livelli scolastici successivi, le sequenza dei passaggi è coerente con il problema posto.

Va però segnalato che non sempre la scelta dell'opzione corretta implica una comprensione del problema o una traduzione coerente in linguaggio matematico. Come evidenzia Zan (2011, p. 3): «(...) una risposta corretta può essere il frutto di processi di pensiero scorretti o parziali, e non di un'effettiva comprensione». A fianco si riporta il protocollo di un allievo che giunge alla stessa conclusione, scegliendo dunque l'opzione b), ma dimostrando di non aver capito il senso del quesito. L'allievo risolve la situazione b) utilizzando una sequenza di operazioni errata, ma con un risultato finale uguale a quello che si ottiene dall'espressione riportata nello stimolo. Questo lo porta a scegliere la risposta corretta. L'intenzione del quesito non era però far svolgere i calcoli e confrontare il risultato con quello delle situazioni proposte, bensì individuare il problema modellizzabile attraverso l'espressione indicata.


Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo? 24 × 3 = 72   72 − 12 = 60

a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?

b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?

c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio?

d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro.

Sono abbastanza diffusi nei diversi livelli scolastici gli atteggiamenti di questo tipo, basati sull'importanza attribuita al risultato numerico a discapito del processo risolutivo. La letteratura (Zan, 2007a) ha spesso evidenziato il ruolo centrale rivestito dalle convinzioni sulla matematica nell'apprendimento di questa disciplina, percepita spesso come contenitore di prodotti più che di processi, di regole da memorizzare e applicare, più che da comprendere. Da questo punto di vista, Zan (2002) afferma:

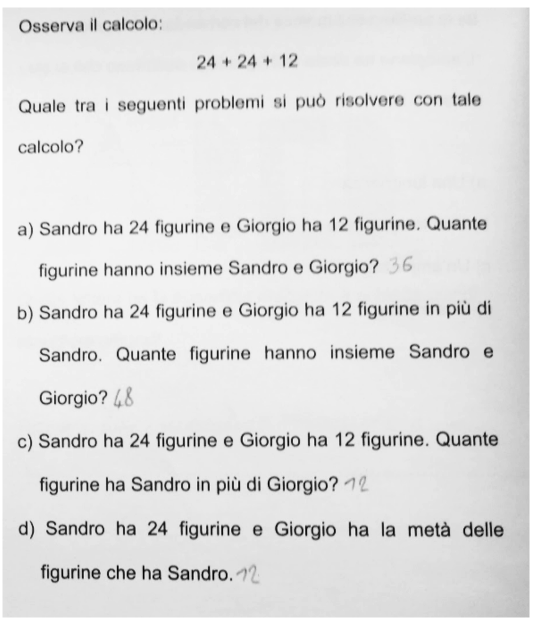
> «Un'interpretazione distorta dell'attività di risoluzione di problemi, che in particolare fissa l'attenzione sulla correttezza del risultato piuttosto che sulla consistenza del processo

risolutivo, contribuisce alla costruzione di una convinzione sulla matematica molto diffusa: in matematica quello che conta sono i prodotti più che i processi. Tale convinzione è associata a una visione della matematica come un insieme di prodotti scollegati tra loro, in quanto svuotati dei processi sottostanti, e ha delle conseguenze molto gravi in relazione all'errore: se il prodotto è sbagliato, lo studente percepirà come fallimentare l'intera prestazione (viceversa è difficile convincere che il procedimento è sbagliato davanti ad un risultato che "torna"); ma soprattutto se il prodotto è riconosciuto come sbagliato, dopo la correzione viene semplicemente sostituito col prodotto giusto».

(pp. 39-40)

Dai protocolli emerge che nonostante non sia richiesto di indicare esplicitamente il risultato dell'espressione indicata, spesso gli allievi eseguono il calcolo trovandone il risultato, senza preoccuparsi invece di associare all'espressione presente un'interpretazione derivante dalle informazioni del testo. Nella maggior parte dei casi analizzati, infatti, gli allievi operano in questo modo: risolvono i quattro problemi e confrontano i risultati con quello dell'espressione.

Nei protocolli seguenti si evidenzia questo atteggiamento: i due allievi risolvono in modo sbagliato la seconda situazione, trovando così un risultato scorretto (48), forse dovuto a errori di calcolo o di comprensione del testo. Non individuando corrispondenza con il risultato 60, decidono di non effettuare alcuna scelta.


Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

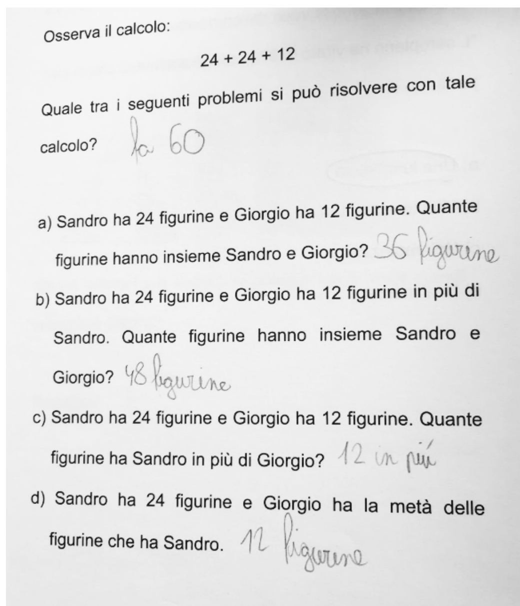
Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo?

a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio? 36

b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio? 48

c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio? 12

d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro. 12


Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo? fa 60

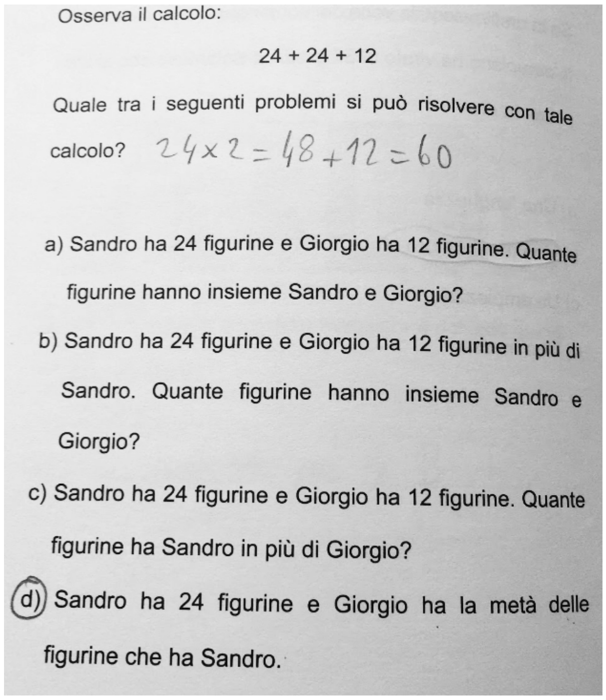
a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio? 36 figurine

b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio? 48 figurine

c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio? 12 in più

d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro. 12 figurine

Tra le opzioni errate quella più scelta è stata la d) (8,1%), nonostante si riferisse ad un problema senza domanda esplicita, e dunque suscettibile di varie interpretazioni, ma è stata forse questa ambiguità a far concentrare l'attenzione degli studenti. Nel protocollo seguente l'allievo calcola il valore dell'addizione indicata, commettendo il classico errore del segno "=" citato in precedenza, ma senza esplicitare nessun ragionamento o processo che lo conduca a rispondere d).



Osserva il calcolo:

24 + 24 + 12

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con tale calcolo? 24 x 2 = 48 + 12 = 60

a) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?

b) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine in più di Sandro. Quante figurine hanno insieme Sandro e Giorgio?

c) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha 12 figurine. Quante figurine ha Sandro in più di Giorgio?

d) Sandro ha 24 figurine e Giorgio ha la metà delle figurine che ha Sandro.

Questo quesito porta a riflettere sulle pratiche didattiche che tradizionalmente vengono condotte in aula, spesso finalizzate ad allenare meccanicismi e automatismi anche di fronte a situazioni che dovrebbero richiedere una maggiore attenzione al testo, al processo e alla gestione delle diverse rappresentazioni semiotiche. Una possibile interessante attività da proporre in classe potrebbe essere quella di far redigere agli allievi testi di problemi che si risolvono con una stessa operazione o espressione, per poi far nascere confronti tra le diverse scelte. La discussione potrebbe diventare un'opportunità per ragionare insieme ai bambini sull'interpretazione del testo e sul senso delle operazioni. Inoltre, costruire testi diversi, ma tutti compatibili con lo stesso procedimento risolutivo, aiuta gli allievi a ragionare sul fatto che una stessa espressione o un risultato numerico può avere origine da situazioni tra loro molto diverse. In Zan (2017) si dà risalto a questo aspetto:

> «(...) due problemi logicamente equivalenti possono essere molto diversi da un punto di vista narrativo. Essere in grado di riconoscere la stessa struttura matematica in diversi story problems è un'abilità importante in matematica, che coinvolge il pensiero logico e che non può essere considerato come un prerequisito. È piuttosto un traguardo dell'educazione matematica, che richiede tempo e attenzione ai punti critici che abbiamo sottolineato.»

3.4. Problemi che richiedono un valore numerico univoco

3.4.1) Gli allievi di una classe di quinta elementare organizzano un torneo di minibasket. Sono in 19 e vogliono formare delle squadre con 4 giocatori ognuna. Quanti allievi non potranno far parte di alcuna squadra?

Risposta: ....

Risposta corretta: 3
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
65,2%	24,2%	10,6%

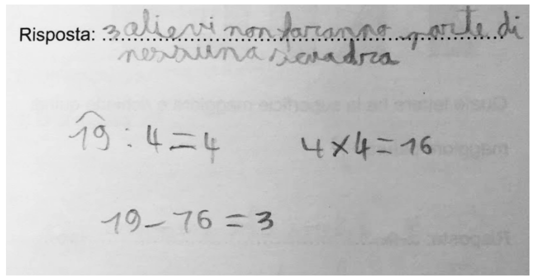
Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica la risposta corretta senza esplicitare alcun procedimento	46,1%
L'allievo indica la risposta corretta mostrando il procedimento algoritmico adottato in colonna o in riga	14,0%
L'allievo risponde correttamente esplicitando un procedimento risolutivo grafico legato al raggruppamento	5,1%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone 4 come soluzione svolgendo la divisione in riga o in colonna o senza esplicitare alcun procedimento	9,1%
L'allievo indica come risposta 1	5,3%
L'allievo propone la risposta "due allievi"	2,0%
Altro	7,8%

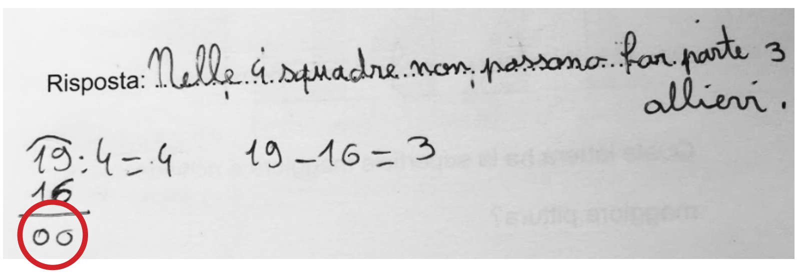
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Ricavare informazioni da una situazione aritmetica espressa in varie forme (linguistica, grafica, ecc.).

Il quesito è il nono del primo fascicolo e registra il 10,6% di risposte mancanti. È una domanda aperta che richiede un risultato numerico univoco. Da un punto di vista disciplinare il quesito richiede la conoscenza del signifcato di divisione con resto all'interno dell'insieme dei numeri naturali. Poiché i numeri coinvolti sono piuttosto piccoli, l'allievo potrebbe essere portato a operare con i due numeri indicati 19 e 4 mentalmente o eventualmente a schematizzare la situazione con un disegno, raggruppando gli allievi in base alle indicazioni del testo, per poi capire quanti rimangono fuori dai gruppi formati. Questo quesito appare a priori piuttosto semplice da modellizzare, anche perché è vicino alla tradizione scolastica che propone spesso situazioni basate sul chiedere di formare gruppi costituiti da un numero uguale di elementi ciascuno, con o senza resto ("…vogliono formare delle squadre con 4 giocatori ognuna."). Tuttavia una volta identificata l'operazione corretta, la difficoltà potrebbe essere capire quale dei due output della divisione è necessario considerare per rispondere alla domanda. Se infatti identifichiamo la divisione in $\mathbb{N}$, come un algoritmo euclideo che a partire da due numeri (dividendo e divisore) ne restituisce altri due (quoziente e resto), potrebbe non essere immediato scegliere come soluzione del quesito il numero che indica il resto.

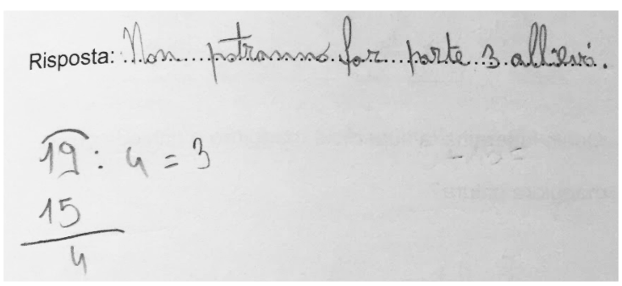
Il 65,2% degli allievi fornisce una risposta corretta; di questi il 46,1% non esplicita il procedimento risolutivo.



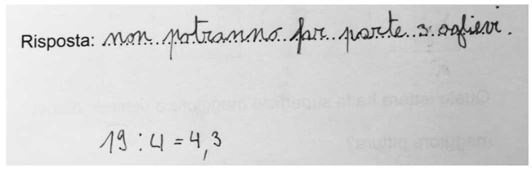
Il 14,0%, invece, esplicita il procedimento o il ragionamento effettuato e riporta la soluzione corretta. L'allievo del protocollo a fianco svolge l'algoritmo della divisione in riga, effettuando anche la moltiplicazione come prova, mentre quello riportato di seguito svolge la divisione in colonna, commettendo però un errore nell'esplicitazione del resto, pur rispondendo correttamente alla domanda posta: inserire "00" come risultato della sottrazione tra 19 e 16. Ciò è sbagliato e potrebbe nascondere una incomprensione del perché si effettuano determinati passaggi nell'algoritmo in colonna della divisione o sul significato del numero che si inserisce in quella determinata posizione. L'allievo potrebbe pensare che tutte le divisioni danno come resto 0. Sarebbe interessante proporre al ragazzo un'analoga situazione con numeri molto più grandi per comprendere se ha effettive misconcezioni da questo punto di vista o l'errore deriva semplicemente da una distrazione.



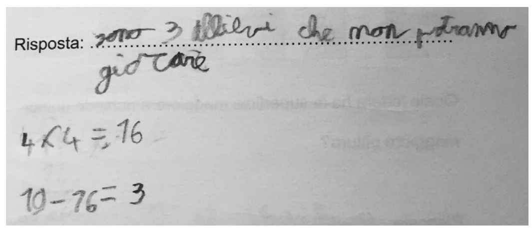
Nella stessa categoria troviamo anche coloro che rispondono correttamente alla richiesta posta, pur commettendo errori di tipi diversi, come dimostra ad esempio il seguente protocollo.



In questo caso da un punto di vista algoritmico è presente un errore di calcolo (15 invece di 16), inoltre dal punto di vista concettuale si rileva che l'allievo ha scritto come risultato il quoziente della divisione piuttosto che il resto. Essendo il risultato numericamente corretto, pur derivante da un errore di calcolo, la risposta viene accettata dato che era esplicitamente richiesto il valore numerico. Questo dovrebbe far riflettere su come sia necessario nelle pratiche d'aula (che in genere hanno obiettivi diversi dalle valutazioni standardizzate) chiedere di esplicitare il più possibile la procedura, il ragionamento, verbalmente o per iscritto, in modo da essere certi che sia corretto ciò che si è compreso.

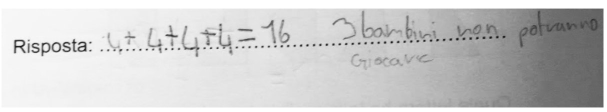


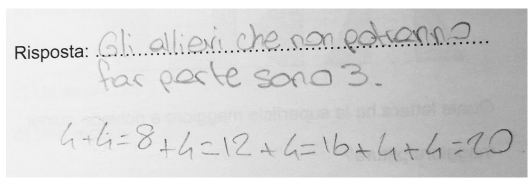
Analogamente, il protocollo a fianco potrebbe rilevare una delle tipiche misconcezioni che si evidenziano anche in studenti più adulti. La risposta è corretta, ma l'uguaglianza scritta è profondamente sbagliata da un punto di vista matematico e "pericolosa" da un punto di vista didattico. Nel contesto descritto dalla domanda non ha senso scrivere che ci sono "4,3 gruppi", il numero deve essere necessariamente intero. Scrivere un numero razionale potrebbe indicare l'errata convizione che la divisione sia da eseguire nell'insieme ℚ, o la mancata conoscenza dell'algoritmo euclideo della divisione, o forse la virgola potrebbe essere semplicemente intesa come separazione tra quoziente e resto. Supponendo tuttavia di estraniarsi dal contesto reale e di considerare la divisione come pura operazione aritmetica in ℚ, il risultato scritto è comunque sbagliato, infatti 19 : 4 = 4,75. Questa scelta potrebbe dipendere da una misconcezione piuttosto diffusa negli allievi e spesso anche negli adulti che consiste nalla convinzione che il resto della divisione coincide con la parte decimale del quoziente.



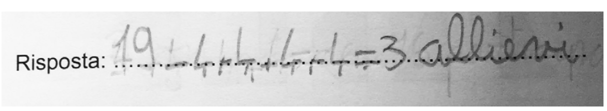
Tra le strategie utilizzate da coloro che forniscono una risposta corretta sono presenti anche la procedura moltiplicativa, additiva e sottrattiva. Nel protocollo a fianco l'allievo individua il multiplo di 4 più vicino a 19 e poi considera il resto della sottrazione.

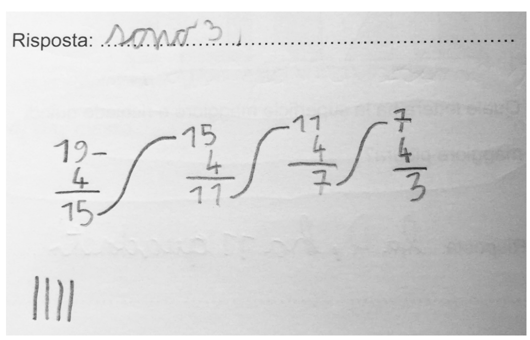
Nei protocolli seguenti gli allievi si avvicinano progressivamnete a 19 aggiungendo man mano il 4 fino ad arrivare all'intero minore più vicino a 19.





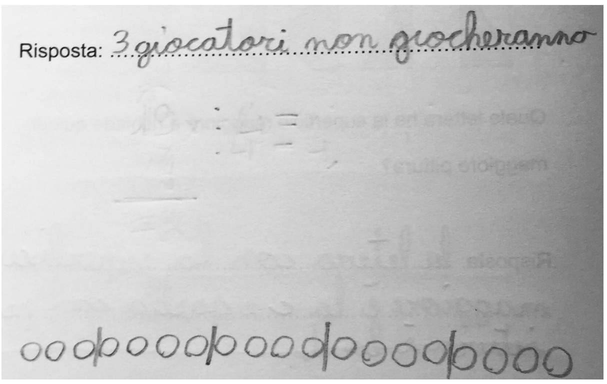
Invece nei protocolli seguenti gli allievi tolgono progressivamente dal dividendo 4 fino a quando è possibile, valutando infine quanto resta.

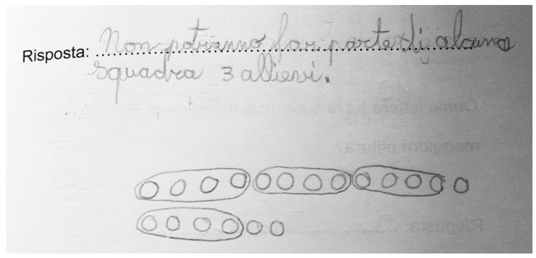




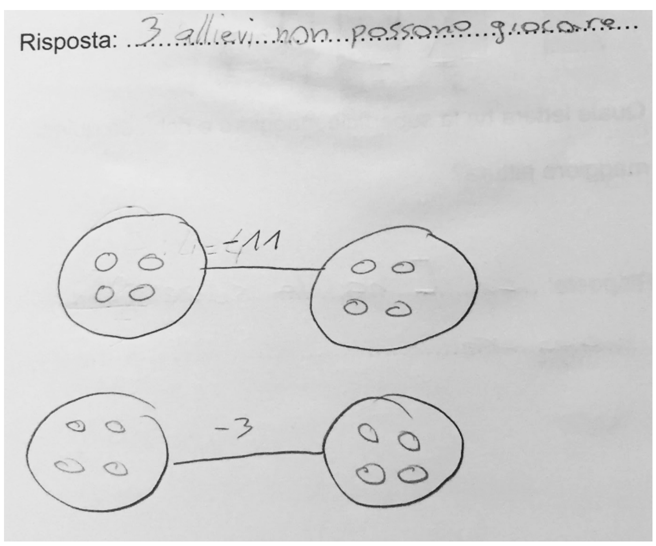
Da un punto di vista didattico sarebbe auspicabile incentivare il confronto e l'utilizzo delle diverse strategie, nell'ottica di favorire una concettualizzazione più consapevole delle diverse operazioni. Come spiega Ferrero (1990), le strategie spontanee della divisione per essere riconosciute dai bambini come "procedure", devono essere state oggetto di riflessione, e solo curando questa delicata transizione si potrà avere una piena consapevolezza della loro tecnica di calcolo scritto. Per consentire a tutti i bambini di comprendere l'algoritmo della divisione potrebbe essere opportuno mostrare tecniche di calcolo più esplicative che permettono di riflettere sui singoli passaggi.

Nei protocolli seguenti emergono invece procedimenti che prevedono rappresentazioni grafiche iconiche della situazione proposta, con evidenziata l'identificazione dei gruppi di giocatori e, di conseguenza, il numero di allievi che non appartengono ad alcuna squadra. In questi casi si evince un pieno controllo del senso della domanda e un'esplicitazione attraverso uno schema/disegno di quanto espresso dal problema. Il 5,1% opera in questo modo.

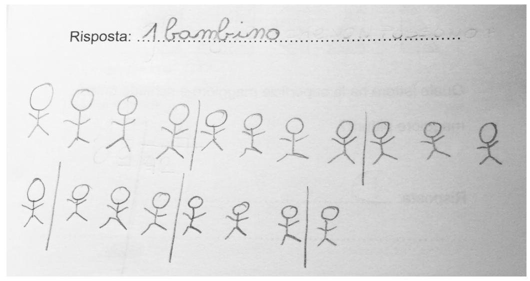




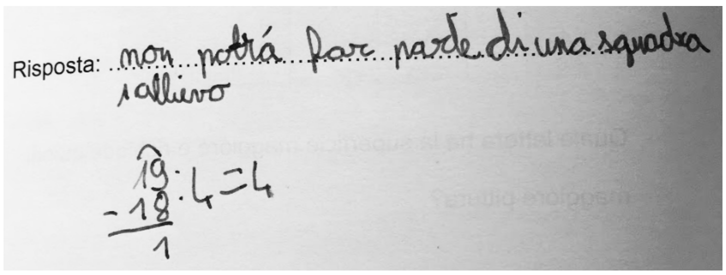
Generalmente nelle prassi didattiche non vengano molto valorizzate tali strategie, certamente meno "formali" dal punto di vista del sapere adulto, ma senza dubbio efficaci e impregnate di senso. Queste possono essere importanti risoluzioni dalle quali partire dal punto di vista didattico per visualizzare la situazione e dare significato all'operazione risolutiva. Il protocollo che segue è interessante perché mostra una sorta di algoritmo della divisione espresso graficamente, in cui vengono indicati i gruppi formati e ciò che rimane man mano dallo "svuotamento" del dividendo.



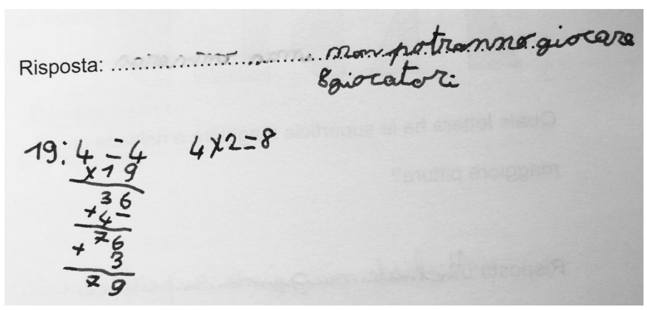
Non sempre questo tipo di scelta grafica è efficace, come dimostra il protocollo a fianco, dove l'allievo rappresenta iconicamente i 19 bambini e li suddivide, però, in modo sbagliato.



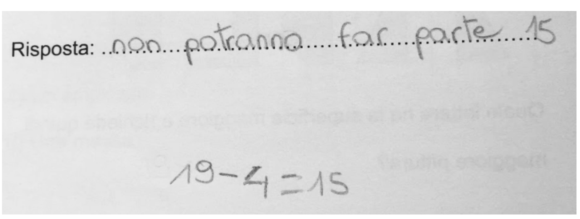
L'errore più diffuso tra gli allievi che forniscono la risposta sbagliata è quello di indicare 4, invece di 3, esplicitando il numero del quoziente piuttosto che quello del resto (9,1%). Mentre il 5,3% degli allievi indica come soluzione 1: in alcuni casi questa risposta sembra dipendere da un errore di rappresentazione (come mostrato nella figura sopra), in altri da un errore di calcolo, come nel seguente caso:

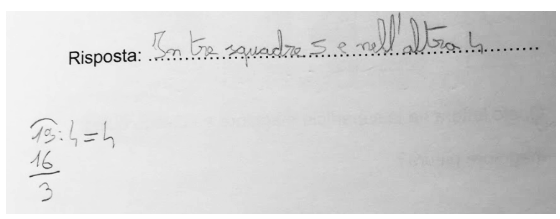


Nella categoria "Altro" vi sono risposte variegate che dipendono spesso da errori effettuati nella procedura, come mostra il seguente protocollo.



Della stessa categoria fanno parte anche gli allievi che modellizzano in modo errato il problema individuando un'operazione risolutiva sbagliata (protocollo a sinistra) o evidenziano un'incomprensione dello stimolo e della domanda posta (protocollo a destra).





Seconda somministrazione.
La domanda è stata somministrata anche agli studenti di prima media. Nella seguente tabella ne sono riportati i risultati.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	Percentuali seconda somministrazione (I SM)
Risposte corrette	65,2%	50,6%
Risposte errate	24,2%	30,5%
Risposte mancanti senza motivazione	10,6%	16,7%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	2,2%

Osserviamo una differenza di circa 15 punti percentuali nelle risposte corrette: gli allievi di quinta elementare ottengono prestazioni migliori. Le risposte errate possono essere così suddivise:

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo indica come risposta 1	5,3%	8,0%	6
L'allievo propone 4 come soluzione svolgendo la divisione in riga o in colonna o senza esplicitare alcun calcolo	9,1%	6,9%	5
Altro	9,8%	15,6%	11

Le percentuali riportate nella tabella precedente mostrano che in prima media gli allievi prediligono la risposta 1, mentre in quinta elementare l'errore più frequente è legato alla risposta 4. In questo caso le interviste hanno permesso di far luce sul ragionamento celato dietro queste risposte.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
1	I.: "Cosa dice questo problema?" A: "Allora vogliono fare un torneo di minibasket e vogliono fare 4 squadre. Ehm delle squadre con 4 giocatori ognuna. Quindi quanti allievi non potranno far parte di alcuna squadra, ho fatto un calcolo nella mia mente, per esempio 20 x 4 che è il numero che si avvicina di più a 19…" I.: "20 x 4." A.: "20 x 4 che fa 20…eh no scusa ho fatto 5 x 4 che fa 20 ed è il numero più vicino a 19 e visto che dovevano fare 5 squadre e uno non poteva giocare perché erano in 19 quindi una squadra era fatta da 3." Poi l'allievo si ferma e ci pensa un attimo. A.: "Ah prima non avevo ragionato bene!"
1	I.: "Mi puoi spiegare come hai fatto per risolvere questo quesito?" A.: "Ok. Ho preso una squadra che contiene 4 bambini, poi ho fatto un'altra squadra che contiene 4 bambini, poi ho fatto 4 e 4 che fa 8, poi ho fatto la terza squadra con 4 bambini e fa 12, una quarta squadra che contiene 4 bambini che fa 16, e poi ho fatto l'ultima che contiene sempre 4 bambini e che fa 20 e invece … oh aspetta …" I.: "Prova a rileggere questo quesito e a spiegarmelo con le tue parole." L'allieva rilegge la domanda. I.: "Ok. Non eri convinta prima, cos'è che non ti torna?" A.: "Sì perché restano 20 bambini, il risultato, e però invece sono 19." I.: "Quindi quanti bambini restano fuori?" A.: "Quindi 1 bambino resterà fuori."
1	I.: "Tu hai risposto 1, e ora ti chiedo se puoi far vedere come hai fatto a rispondere". A.: "Ho fatto 4 che sarebbero i giocatori che ci sono in ogni squadra per 4 e mi è venuto 20." I.: "4 x 4 ti è venuto 20?" A.: "Sì e siccome ci sono 19 persone ne rimane uno, quell'uno non potrà giocare."

Dai protocolli di quinta elementare non si potevano evincere le motivazioni alla base della risposta 1, mentre con l'intervista esse risultano più evidenti. Gli allievi che scelgono di rispondere 1, individuano il multiplo di 4 più vicino a 19, ossia 20, e considerano la differenza tra 20 e 19. Questo procedimento dimostra una totale mancanza di senso rispetto alla situazione proposta. La risposta frettolosa e poco ragionata è indotta anche dal fatto che questi allievi non hanno immaginato concretamente la situazione, ma hanno operato in modo superficiale esclusivamente con i numeri. La ricostruzione (mentale o disegnata) della scena descritta avrebbe permesso di comprendere l'errore commesso. L'esplicitazione durante l'intervista del procedimento scelto, in alcuni casi, ha permesso una riflessione a posteriori sull'errore commesso e una consapevolezza maggiore del senso del problema.

Le tre interviste seguenti, invece, sono di allievi che hanno operato con la divisione ma che evidenziano alcune delle problematiche già ipotizzate. Da un punto di vista concettuale, il primo allievo ha profonde lacune riguardo il significato del resto di una divisione. Il secondo, invece, ha difficoltà nella comprensione del testo e nella ricostruzione della situazione. L'ultima intervista, invece, riporta una risoluzione formale corretta, l'allievo risolve diligentemente la divisione 19 : 4 individuando il quoziente e il resto, ma poi non riesce a interpretare correttamente questi dati numerici all'interno della situazione proposta, evidenziando la difficoltà legata all'interpretazione dei risultati esposta nel paragrafo 2.3.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
4,5	I.: "Qual è la tua risposta?" A.: "Io ho 19 : 4 che fa 4,5." I.: "Quindi qual è la tua risposta?" A.: "La mia risposta è … però non posso fare 4,5 quando rispondo." I.: "Perché?" A.: "Ehm perché non esistono 4,5 persone." I.: "Bene bene! Quindi … dobbiamo trovare un altro modo. Ti dice niente la divisione con il resto?" A.: "La divisione con il resto sì." I.: "Quindi sarebbe 4 gruppi con il resto di 5."
4	I.: "Come hai ragionato per trovare questo numero? Perché hai scelto di fare 19 : 4? Cosa ti aspettavi di trovare?" A.: "Quanti giocatori non potevano giocare." I.: "Quindi dividere 19 in 4 ti dà come risultato gli studenti che non giocano?" A.: "Uhm." I.: "Immagina di essere tu il professore come formeresti tu queste squadre?" A.: "Uno non potrebbe giocare." I.: "Perché?" A.: "È un numero dispari."
19 : 4 = 4 r 3	I.: "Consideriamo questo problema. Ecco siccome non mi hai scritto qui la risposta, mi hai fatto solo un calcolo, in base a questo calcolo qual è la risposta secondo te? A.: "Che non mi ricordavo il riporto come si faceva, no il resto!" I.: "Quindi se adesso dovessi scrivere la risposta, quanti sono gli allievi che non faranno parte di alcuna squadra che numero scriveresti? Qual è la soluzione di questo problema?" A.: "Non lo so molto bene perché qui mi è uscito 4 con il resto e non mi ricordavo bene cosa fare con il resto." I.: "Ma qui cosa devi scrivere? Il resto oppure 4?" A.: "4."

3.4.2) Nell'autosilo raffigurato possono essere parcheggiate 920 automobili. Quanti piani ha l'autosilo se sappiamo che ogni piano può accogliere 115 automobili?

a) Più di dieci piani
b) 8 piani
c) Non si può sapere
d) 5 piani

Risposta corretta: b
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
8,3%	72,8%	9,1%	4,5%	5,3%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo svolge la divisione tra il numero di auto totali e il numero di macchine per piano	10,6%
L'allievo moltiplica il numero di piani proposti per il numero di auto per piano, verificando quale soluzione corrisponde al numero indicato nella consegna	11,8%
L'allievo non esplicita alcun procedimento sul foglio	50,4%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita alcun procedimento sul foglio	18,7%
L'allievo esplicita alcuni calcoli che presentano degli errori	3,2%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Ricavare informazioni da una situazione aritmetica espressa in varie forme (Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli).

Il quesito è il sesto del primo fascicolo e solo il 5,3% degli allievi decide di non rispondere o fornisce una risposta non valida. La domanda pur essendo analoga alla precedente, risulta più semplice sia come tipologia, essendo a risposta multipla e non a risposta aperta univoca, sia in termini di contenuto matematico mobilitato. Infatti, nonostante sia sempre la divisione l'operazione risolutiva adatta a rispondere, in questo caso si chiede di operare all'interno dell'insieme $\mathbb{N}$, dove il dividendo è multiplo del divisore e la risposta corretta è il quoziente di tale divisione. La situazione proposta è di certo piuttosto tradizionale in un contesto di divisione, ossia si chiede, a partire dal numero totale di oggetti, quanti gruppi si possono formare sapendo quanti oggetti devono essere presenti in ciascun gruppo. In questo caso si tratta di eseguire la divisione 920 : 115 e fornire il risultato presente tra le opzioni di scelta.

Tuttavia uno studio a priori del quesito potrebbe rilevare alcune criticità. La parola "autosilo" probabilmente non fa parte del vocabolario comune degli allievi, per questo motivo gli autori dell'item hanno immaginato di poter chiarire il significato di tale parola inserendo un'immagine esplicativa a fianco del quesito, un'immagine che, a nostro parere, non è particolarmente chiara se non per la presenza della lettera "P", che tradizionalmente indica un parcheggio. Ad ogni modo, dai protocolli del campione analizzato non sono state riscontrate difficoltà interpretative, anche se non se ne esclude la presenza.

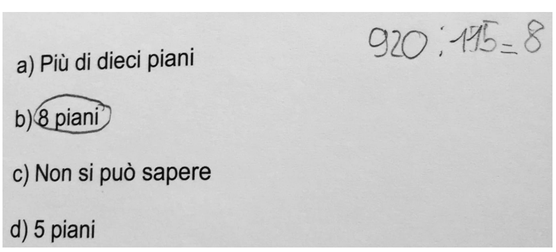
Come abbiamo rilevato nel secondo capitolo, il primo passo per la risoluzione di un compito è strettamente legato all'interpretazione del testo allo scopo di farsi un modello della situazione. In particolare lo studente deve conoscere il significato delle parole della lingua italiana (specialistiche o comuni) presenti, il cosiddetto *dizionario* come già evidenziato a p. 28.

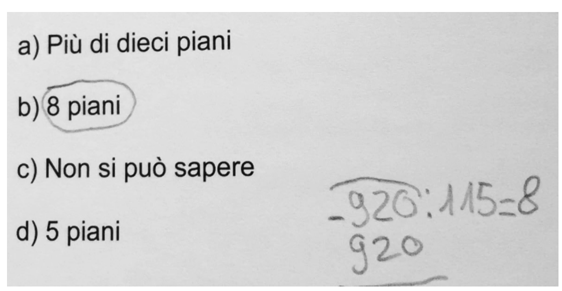
Tuttavia, come evidenziato dalla ricerca di D'Amore (1997b) (si veda il paragrafo 2.3. a p. 27), all'allievo sembra servire solo un vago modello della situazione per poter risolvere alcuni problemi, anche senza troppi dettagli. Nel nostro caso sembra non essere necessario conoscere in modo approfondito il significato del termine "autosilo". Secondo D'Amore (1997, p. 11): «(l'allievo) supera l'ostacolo della mancanza di un dato significativo, immaginando l'evolversi della scena, piuttosto che i singoli dettagli di essa».

Un'altra possibile difficoltà è la presenza di numeri di tre cifre. A differenza del quesito precedente, l'allievo, una volta individuata l'operazione da eseguire per trovare la soluzione, è in qualche modo costretto a eseguire un calcolo in colonna o in riga o stimare il risultato. In questo caso, sono difficilmente realizzabili dei raggruppamenti sulla base di rappresentazioni figurali. Inoltre, una divisione dove il divisore è un numero di tre cifre potrebbe essere complessa per allievi di questa età.

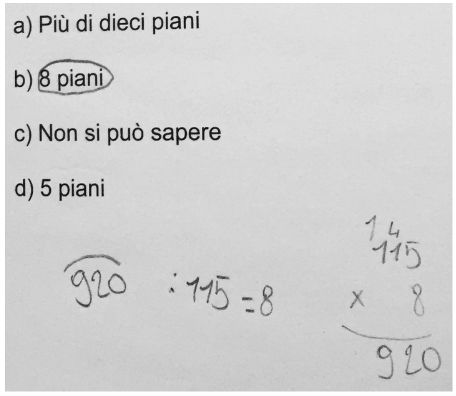
Le opzioni di scelta contengono alcuni aspetti interessanti da un punto di vista didattico: due riportano un numero esatto di piani (b) e d)), rispettivamente 8 e 5; una opzione riporta una stima scorretta del loro numero (a) più di 10 piani); e una propone una risposta che dichiara l'impossibilità di rispondere con le informazioni fornite dal testo (c) non si può sapere). Questa varietà di scelta dovrebbe indurre l'allievo a ragionare in modo critico.

I risultati mostrano che molti allievi rispondono correttamente a questo quesito (72,8%). Si riportano di seguito alcuni interessanti protocolli di risposte corrette, dato che un terzo circa degli allievi che sceglie l'opzione b) esplicita i calcoli eseguiti. Nei due protocolli seguenti sono eseguite correttamente la divisione in riga e in colonna.





Nel seguente protocollo l'allievo riporta anche la prova effettuata con la moltiplicazione.


a) Più di dieci piani

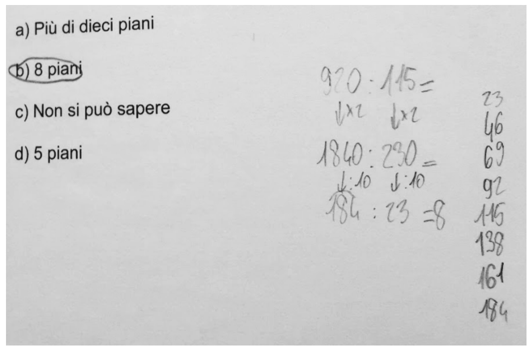
b) 8 piani

c) Non si può sapere

d) 5 piani

920 : 115 = 8

115 x 8 = 920


a) Più di dieci piani

b) 8 piani

c) Non si può sapere

d) 5 piani

920 : 115 =

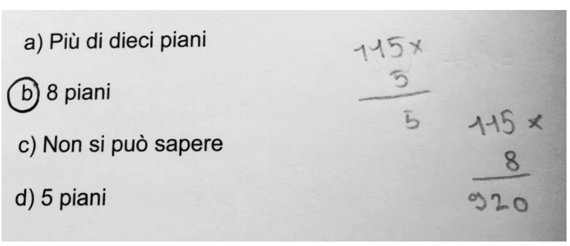
1840 : 230 =

184 : 23 = 8

23 46 69 92 115 138 161 184

Il protocollo a fianco mostra un procedimento di calcolo mentale molto interessante, sia per le proprietà delle operazioni, sia per come sono state esplicitate e giustificate attraverso una rappresentazione schematica. L'allievo per semplificare i due termini della divisione decide di sfruttare la proprietà invariantiva e di moltiplicare o dividere per uno stesso numero sia il dividendo, sia il divisore per non alterare il risultato. Questa proprietà è molto importante per poter applicare strategie di calcolo mentale e l'allievo dimostra di utilizzarla in modo critico e consapevole. Egli sceglie di applicarla due volte di seguito, prima raddoppiando i due termini e poi dividendoli per 10. Avrebbe potuto direttamente dividere per 5 entrambi i termini, ma, evidentemente, è per lui più semplice raddoppiare e dividere per 10 piuttosto che dividere subito per 5. Egli giunge così all'operazione 184 : 23, equivalente a quella iniziale. Per risolvere tale divisione inoltre opera per addizioni successive, ossia aggiunge il 23 fino ad arrivare al dividendo e considera il numero di volte che l'ha aggiunto.

Altri procedimenti vengono evidenziati dai seguenti protocolli.


a) Più di dieci piani

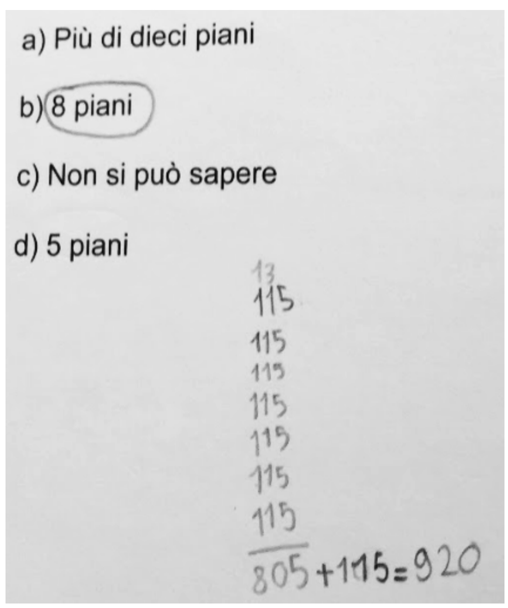
b) 8 piani

c) Non si può sapere

d) 5 piani

115 x 5 = 5

115 x 8 = 920


a) Più di dieci piani

b) 8 piani

c) Non si può sapere

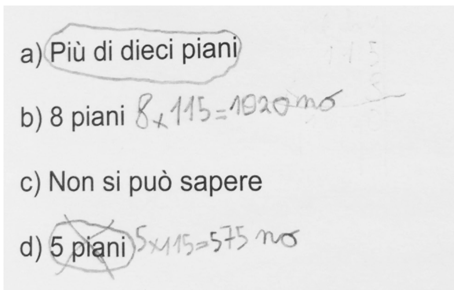
d) 5 piani

115 115 115 115 115 115 115

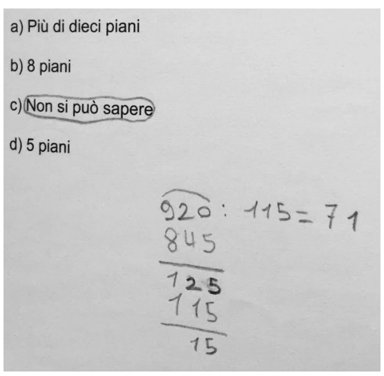
805 + 115 = 920

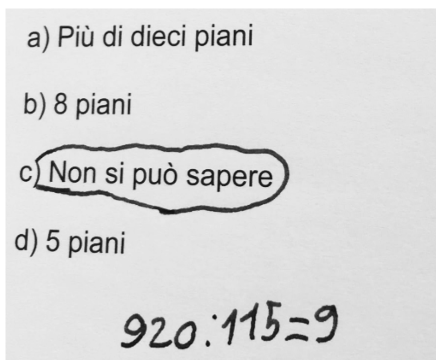
Nel protocollo a sinistra della pagina precedente si vede come l'allievo proceda per esclusione, andando ad analizzare i due casi numerici proposti. Sceglie di svolgere la moltiplicazione ed esclude, senza neanche finire il calcolo, l'opzione d). Infatti, l'ultima cifra del prodotto tra 115 e 5 è 5, diversa dallo 0 di 920. Nel protocollo a destra, invece, l'allievo addiziona il 115 inizialmente 7 volte, probabilmente dopo averlo stimato e poi lo aggiunge ancora una volta, fino ad arrivare a 920. Il numero totale di volte che è stato aggiunto il 115 è quindi la risposta corretta, ossia 8.

Tra le opzioni sbagliate la a) è stata scelta dall'8,3%. A questo riguardo, è interessante il seguente protocollo che mostra come l'allievo abbia proceduto per tentativi, cercando di individuare attraverso la moltiplicazione la risposta corretta. Nel caso degli 8 piani (risposta corretta b)) l'allievo commette un errore di calcolo (8 x 115 = 1020) e quindi la esclude. La d) è scartata tramite la verifica effettuata con la moltiplicazione. Tra le opzioni a) e c) sceglie la a), ma non possiamo sapere la motivazione: se è perché ha valutato effettivamente giusta questa soluzione o perché spinto dalla convinzione dell'obbligatorietà di una risposta numerica ad un problema di matematica.



Il 9,1% degli allievi sceglie la risposta c) e da alcuni protocolli si evince che la motivazione è derivante dall'esecuzione errata dell'operazione che non rientra di conseguenza in nessuna delle altre opzioni.

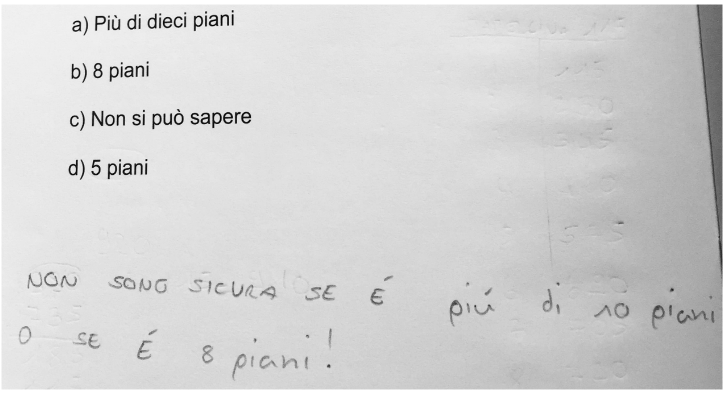




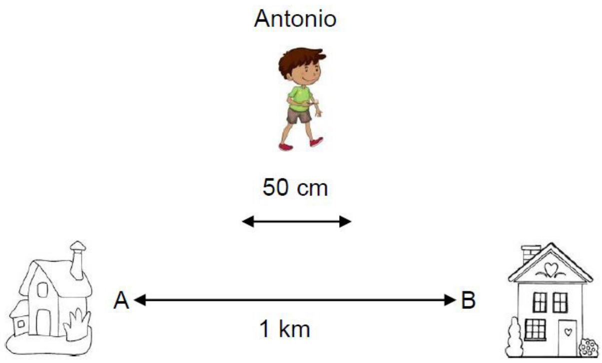
Si noti come l'allievo del protocollo di destra abbia comunque scelto la risposta c) nonostante il risultato trovato fosse superiore a 10 e quindi avrebbe potuto scegliere più coerentemente la risposta a).

Il 4,5% degli allievi indica la scelta d).

Un allievo, dopo aver effettuato diversi calcoli (cancellature del foglio), decide di non dare nessuna risposta ma dichiara la sua indecisione tra due scelte, come mostrato nel seguente protocollo.



3.4.3) Osserva la situazione descritta dall'immagine:



Quanti passi deve fare Antonio per andare da A a B, con camminata regolare?

Risposta: ....

Risposta corretta: 2000
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
17,9%	54,5%	27,6%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica il numero corretto di passi senza esplicitare procedimenti	13,8%
L'allievo converte i km in cm ed esegue la divisione	4,1%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica 200 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	9,1%
L'allievo indica 20 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	7,7%
L'allievo indica 3 o 3,5 o 4 come soluzione	4,1%
L'allievo indica 100 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	3,7%
L'allievo indica 1000 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	2,0%
L'allievo indica 20000 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	2,2%
L'allievo indica 500 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	4,1%
L'allievo indica 50 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	2,2%
Altro	19,4%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Il quesito è il trentunesimo del secondo fascicolo e il 27,6% degli allievi non fornisce alcuna risposta.

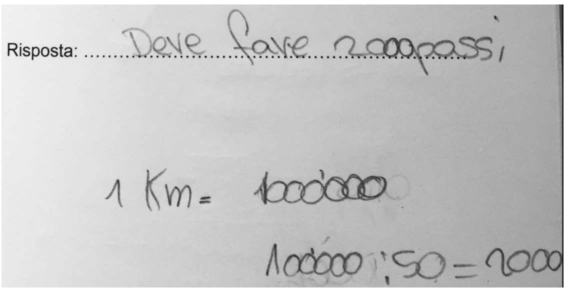
L'item è di tipo aperto e prevede una risposta numerica univoca. Lo stimolo presente non è dato verbalmente, bensì attraverso un'immagine che diventa dunque il fulcro per l'interpretazione del quesito. Si chiede, infatti, di osservare la situazione descritta dall'immagine e di rispondere. La prima difficoltà è dunque una decodifica delle informazioni che il disegno vuole rappresentare. Tuttavia, l'immagine potrebbe risultare fuorviante. Il segmento che dovrebbe indicare la lunghezza del passo di Antonio rappresenta una lunghezza di 50 cm e il segmento che indica la distanza tra A e B rappresenta la lunghezza di 1 km, ma i due segmenti non sono proporzionali a questi valori, e questo potrebbe comportare uno scollamento tra la realtà e la rappresentazione. I due dati numerici sono dunque la distanza tra A e B (1 km) e la lunghezza del passo (50 cm). Tuttavia, mentre la distanza tra A e B viene evidenziata in modo chiaro con un segmento che collega i due punti, la lunghezza del passo è rappresentata con un segmento sotto l'immagine di Antonio e non è in alcun modo nominata nello stimolo, ma solo nella domanda. Tra l'altro, essendo più lungo il segmento rappresentato, rispetto al passo del bambino raffigurato (distanza tra i due piedi), potrebbe non essere immediato interpretare quel dato. Un altro fattore da tenere conto è il mescolamento tra aspetti reali (il ragazzino Antonio, la camminata regolare) ed elementi più astratti (rappresentazione attraverso segmenti, i simboli A e B per indicare i due edifici).

Una delle principali competenze matematiche che si vorrebbe sviluppare negli allievi è la capacità di estrapolare informazioni da diverse rappresentazioni semiotiche, anche figurali, tuttavia come abbiamo rilevato, questa immagine potrebbe risultare ingannevole.

Un'altra osservazione scaturisce dal termine "regolare" per descrivere la camminata. Gli autori del quesito certamente intendono con questo termine la velocità, che deve essere uniforme per poter garantire l'unicità della risposta, ma questa parola, pur essendo stata usata per far intuire un concetto non ancora conosciuto formalmente, potrebbe confondere gli allievi ed essere associato a significati diversi da quello auspicato.

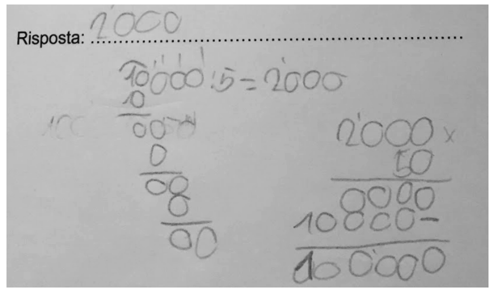
Una volta interpretate la situazione e le informazioni rilevanti, anche in questo caso l'allievo potrebbe effettuare una divisione ma, diversamente dai quesiti precedenti, è necessaria una conversione delle due lunghezze nella stessa unità di misura. È possibile trasformare 50 cm in 0,005 km ed eseguire la divisione non banale 1 : 0,005, oppure trasformare 1 km in 100000 cm ed eseguire quella più facilmente gestibile 100000 : 50. La risoluzione di entrambe può presupporre l'applicazione della proprietà invariantiva. L'allievo potrebbe anche operare in modo proporzionale, ragionando in questo modo: con due passi Antonio copre la distanza di 1 m, ma 1 km sono 1000 m quindi occorreranno 2000 passi.

Il quesito registra delle performance deludenti: solo il 17,9% risponde correttamente. La maggior parte effettua la divisione in colonna (ultimi tre protocolli riportati di seguito), noncurante del fatto che applicando le proprietà della divisione sarebbe stato possibile semplificare notevolmente il calcolo. In generale, sono diversi coloro che effettuano la prova con la moltiplicazione per essere sicuri del risultato (secondo e quarto protocollo). Sembra che l'allievo si senta più sicuro di fronte alla risoluzione "meccanica" di un algoritmo, perché si affida alla sequenza dei vari passaggi, piuttosto che all'applicazione consapevole delle proprietà.


Risposta: Deve fare 2000passi,

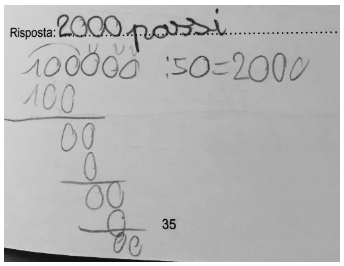
1 Km= 1000000

100000 : 50 = 2000

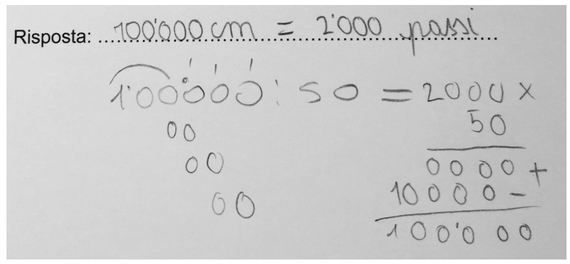

Risposta: 2000

100000 : 5 = 2000

2000 x
50
0000
10000 -
100000


Risposta: 2000 passi

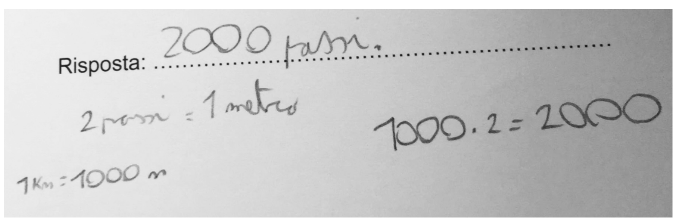
100000 :50=2000


Risposta: 100'000 cm = 2'000 passi

1'00000 : 50 = 2000 x
50
0000 +
10000 -
100'000

Il quesito è classificato nell'ambito *Grandezze e misure* perché richiede di tenere in considerazione le grandezze e le unità di misura. Gli allievi che rispondono correttamente operano le trasformazioni nel modo giusto, ma non sempre inseriscono esplicitamente l'unità di misura, come succede nel primo protocollo. Scrivere 1 km = 1000000 senza inserire l'unità di misura appropriata non è matematicamente corretto, perché si eguaglia una grandezza con un numero reale. L'omissione in questo caso, però, non incide negativamente sulla risoluzione del quesito, poiché l'allievo individua correttamente il numero di passi, correggendo nell'operazione successiva il numero 1000000 in 100000.

Di seguito si riporta il procedimento di un allievo che adotta un interessante ragionamento corretto di tipo proporzionale.

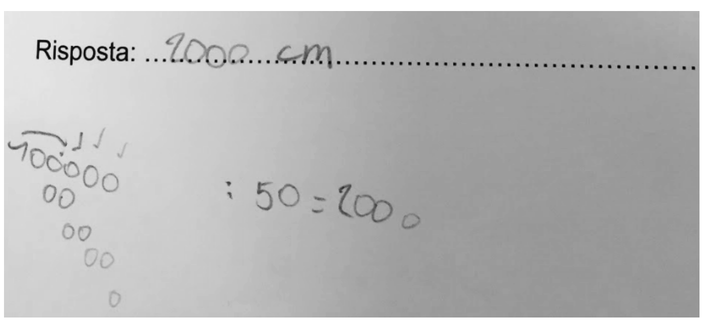

Risposta: 2000 passi.

2 passi = 1 metro

1000 . 2 = 2000

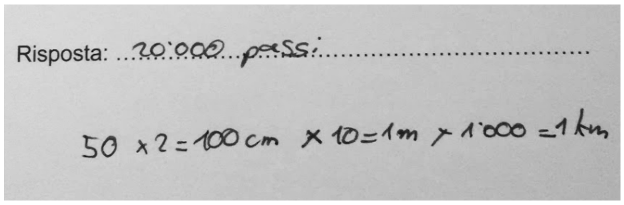
1 Km = 1000 m

Tra le risposte errate vi sono allievi che inseriscono l'unità di misura a sproposito, dimostrando di non aver capito la richiesta.

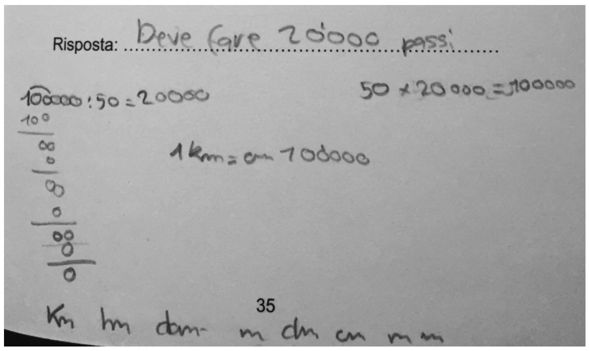

Risposta: 2000 cm

100000 : 50 = 2000

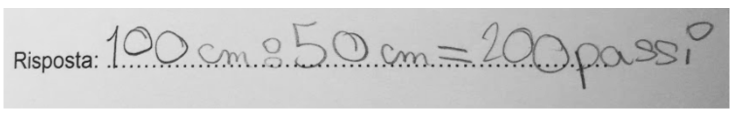
Il 19,0% degli allievi fornisce una risposta che si discosta da quella corretta per uno o più ordini di grandezza. Nello specifico, il 9,1% risponde 200 passi, il 7,7% 20, il 2,2% 20000. L'errore può essere dovuto ad una scorretta conversione delle unità di misura, come evidenzia il seguente protocollo,



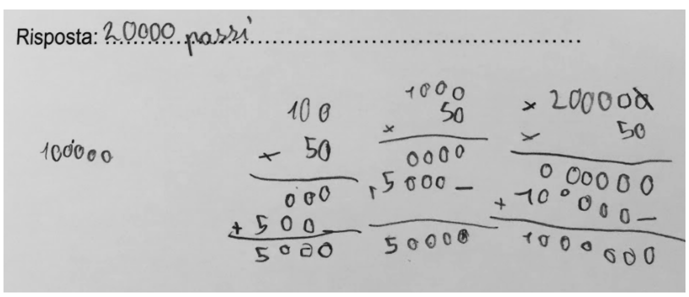
oppure ad un errore nello svolgimento della divisione, come emerge dal seguente protocollo,



oppure ad entrambi i fattori, come nel seguente caso.

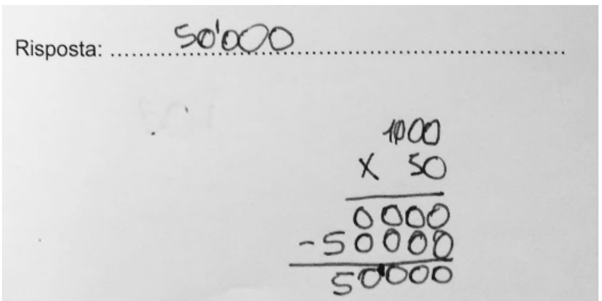


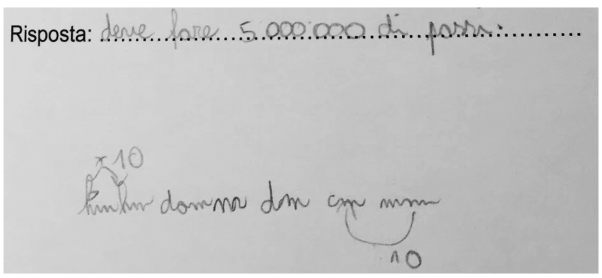
Il seguente protocollo mostra un approccio per tentativi che sfrutta la moltiplicazione. È interessante osservare come, anche in questo caso, l'allievo risolva tutte le moltiplicazioni senza applicare proprietà o strategie più efficaci e immediate.

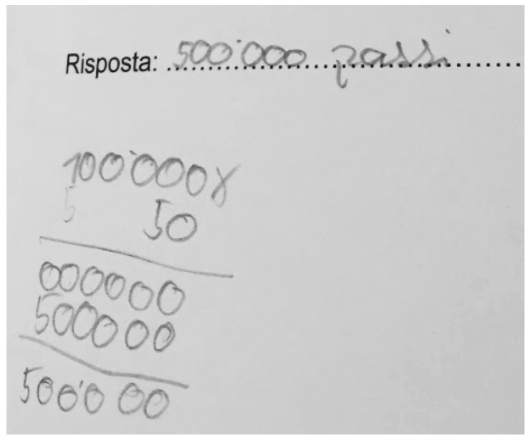


Queste risposte permettono di fare una considerazione. Coloro che rispondono 20, oltre ad aver commesso errori di diverso tipo, dimostrano una scarsa consapevolezza delle grandezze descritte e carenze nello stimare il risultato. Un controllo a posteriori sull'ordine di grandezza avrebbe permesso di capire che non è possibile coprire una distanza di 1 km con soli 20 passi. La determinazione dell'ordine di grandezza di oggetti e di situazioni reali, può essere conseguita solo attraverso l'esperienza da acquisire tramite le misurazioni realizzate in maniera effettiva, la loro previsione a priori e successiva verifica. In questo senso è fondamentale lavorare sulla stima in classe per acquisire una certa sensibilità, prendendo dati reali e verosimili che permettano di ragionare sull'ordine di grandezza, con cui confrontare il risultato delle stime. Per un approfondimento sul tema si veda (Pellegrino, 1999; Segovia, Castro, & Rico, 1989).

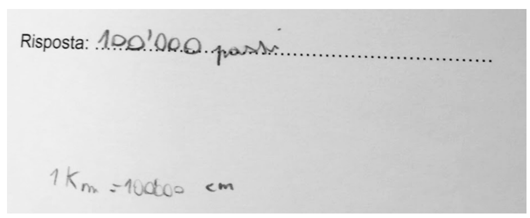
Il 12,2% fornisce come risposta un numero formato dal 5 seguito da una quantità variabile di 0, in particolare il 2,2% ha risposto 50, il 4,1% ha risposto 500. Queste risposte derivano dal considerare i numeri presenti nell'immagine e moltiplicarli tra loro, dopo aver eventualmente operato delle trasformazioni. Questa scelta mostra la difficoltà a saper modellizzare la situazione descritta. I protocolli seguenti mostrano alcune risposte di questa categoria.







Il 10,4% individua come risposta una potenza di 10, in particolare il 3,7% risponde 100 e il 2,0% 1000, gli altri altre potenze (10000, 100000, 1000000).
Numeri di questo tipo possono essere riconducibili alla conversione dei km in un'altra unità di misura, che viene poi fatta coincidere con il numero dei passi. Tuttavia solo in alcuni casi riusciamo a dedurlo con sicurezza (protocollo a fianco), mentre negli altri non è presente l'esplicitazione di un qualsiasi ragionamento.



Le risposte errate precedentemente analizzate sono tutte riconducibili a difficoltà di conversione o a una scelta sbagliata dell'operazione risolutiva. Sono invece sorprendenti le risposte del tipo: 3 o 3,5, che il 4,1% degli allievi fornisce. Questi numeri potrebbero derivare da una scorretta interpretazione dell'immagine, infatti, possiamo ipotizzare che l'allievo abbia mentalmente o con il righello riportato la lunghezza del segmento più corto sul segmento più lungo trovando che ci sta poco più di 3 volte. Questo mostra come le lunghezze dei due segmenti rappresentati in modo non proporzionale tra loro, siano risultate fuorvianti per alcuni allievi e come l'aspetto figurale abbia avuto un ruolo predominante su quello numerico.

Seconda somministrazione.
Il quesito è stato somministrato anche agli studenti di prima media, con i seguenti risultati.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	Percentuali seconda somministrazione (I SM)
Risposte corrette	17,9%	23,0%
Risposte errate	54,5%	54,0%
Risposte mancanti senza motivazione	27,6%	14,4%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	8,6%

Per quanto riguarda le risposte corrette si evidenzia una migliore performance nella seconda somministrazione, nella quale inoltre l'8,6% dichiara esplicitamente di non aver compreso il testo del problema. Questo dato che non emergeva in modo esplicito nell'analisi dei protocolli del campione di allievi di scuola elementare, conferma le criticità del quesito esposte in precedenza.

Le risposte scorrette possono essere messe a confronto tra loro, dimostrando ancora una volta una forte coerenza:

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo indica 200 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	9,1%	8,0%	3
L'allievo indica 20 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	7,7%	5,7%	0
L'allievo indica 3 o 3,5 o 4 come soluzione	4,1%	2,9%	3
L'allievo indica 100 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	3,7%	2,3%	3
L'allievo indica 20000 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	2,2%	1,7%	0
L'allievo indica 500 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	4,1%	2,9%	2
L'allievo indica 50 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	2,2%	2,9%	0
L'allievo indica 1000 passi come soluzione esplicitando o meno procedimenti	2,0%	2,3%	0
Altro	19,4%	25,3%	11

Di seguito si riportano alcuni stralci di interviste effettuate agli allievi di prima media che hanno fornito risposte scorrette.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
50000	I.: "Come hai fatto a rispondere a questa domanda?" A.: "In pratica io ho trasformato i 50 cm in dm in modo da togliere lo 0, quindi 5 dm, poi ho trasformato 1 km in dm, quindi 10000 e poi ho detto se avesse fatto un passo di 10 cm avrebbe fatto in quel caso 10000 passi … Ho sbagliato … e in pratica allora ho fatto visto che lui ne fa 50 ho aggiunto quello che mancava e ho fatto 50000 passi … ma ho sbagliato!"

Nonostante la risposta di questo allievo sia errata, il suo ragionamento è molto interessante, in quanto utilizza una conversione in una unità di misura per lui comoda, i dm, che gli permette di togliere lo 0 dal 50, e poi ragiona proporzionalmente riportandosi ad un caso più facilmente gestibile da un punto di vista del calcolo (il passo lungo 1 dm). Tuttavia commette in seguito un errore legato al passaggio al caso richiesto dal problema (lunghezza del passo pari a 50 cm). L'allievo ragiona pensando che, poiché con un passo da 10 cm ne servono 10000 per coprire la distanza di 1 km, con un passo di 50 cm, ne serviranno 50000 per coprire la stessa distanza. Egli ipotizza, dunque, che più è lungo il passo, più ne servono per coprire la distanza fissa di 1 km. Questo errore di valutazione è stato analizzato anche in contesti diversi da D'Amore e Fandiño Pinilla (2013), in cui si approfondiscono le ragioni di insuccesso legate ad un quesito somministrato nella prova nazionale italiana INVALSI di matematica nell'anno 2008-2009 destinata agli allievi delle classi quinte della scuola elementare. Il quesito è il seguente:

9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?

- ☐ A. Renata.
- ☐ B. Fabio.
- ☐ C. Maria.
- ☐ D. Non si può sapere.

I risultati italiani sono i seguenti:

a	b	c	d	Mancante/ Non valida
42,9%	2,2%	49,5%	5,1%	0,3%

Secondo gli autori

> «le tipiche indicazioni normative che l'insegnante dà allo studente, "leggi bene il testo", "individua i dati utili", "leggi la domanda" etc., costringono senza alcuna possibilità di scampo il bambino solutore a disinserire la sua capacità logico - critica basata sull'esperienza

> anche extra scolastica (più lunghi sono i passi, minore è il numero che esprime la misura della stanza) e farsi carico di clausole implicite: "più lunga uguale più passi" (non importa di che cosa si stia parlando), senza prendere in esame la situazione, ma solo afferrando acriticamente le consegne numeriche. Cioè si guardano i numeri e la relazione fra essi, non il significato semantico della proposta e della situazione proposta».
>
> (pp. 45-46)

Nelle tre interviste seguenti è invece esplicita l'influenza dell'immagine che ha comportato valutazioni erronee da parte degli allievi.

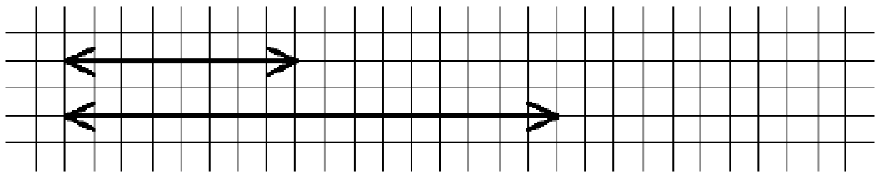
Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
100 passi	I.: "Cosa significa questa freccetta con scritto sopra 50 cm?" A.: "Quanto ha già percorso Antonio."
3 passi	I.: "Come hai fatto a dire che Antonio deve fare 3 passi?" A.: "Metto il segmento così e l'ho riportato sempre in questo (indicando il segmento più lungo)."
50 + 50 + 50 = 150	I.: "Perché devi fare 150 passi?" A.: "Perché ho calcolato con la riga 50 cm 50 cm 50 cm, 3 x 50 fa 150." I.: "50 non sono i passi, cosa significa questo 50 cm, è vero che questo bisognava capirlo dal disegno, cioè che 1 passo corrisponde a?" A.: "50 cm … allora era … 300!"

Il primo allievo interpreta in modo scorretto il significato della freccia e della grandezza presente sopra (50 cm), immaginando sia la distanza già percorsa da Antonio. Gli altri due confondono il significato della rappresentazione (in questo caso il segmento) con l'oggetto matematico che sta veicolando (una distanza), valutando quante volte quel preciso segmento è contenuto in quello più lungo. In D'Amore (1998) si è messo in evidenza come alcuni allievi abbiano difficoltà a risalire da una rappresentazione semiotica al contenuto rappresentato. «In mancanza di chiavi di lettura ed in difficoltà nel "leggere" le situazioni, gli studenti danno "senso" al messaggio creando informazioni di vario tipo (che ho chiamato in qualche caso "informazioni parassite") anche lontane da ogni intenzione comunicativa dell'autore» (D'Amore, 2001, p. 165). Lo scollamento percepito tra concetto matematico e segno/rappresentazione è da tempo analizzato in modo approfondito da numerosi autori (Duval, 1995; Radford, 2000; D'Amore, 2006). Le ricerche in questo ambito evidenziano come le componenti (iconiche, indicali e simboliche) delle rappresentazioni degli oggetti matematici siano fortemente intrecciate alle conoscenze collaterali di studenti e insegnanti, ai contesti d'uso e alle pratiche d'aula (Iori, 2011). La stessa autrice afferma:

> «Dal punto di vista semiotico-interpretativo, in caso di conoscenze collaterali distanti da (o non in equilibrio con) quelle condivise, le componenti iconiche o indicali giocano un ruolo predominante, e diventano, per lo studente, l'unica risorsa o fonte accreditata in situazioni di relativa incertezza o "emergenza", come nelle prove di valutazione».
>
> (Iori, 2011, p. 125)

Nell'ultima intervista a questo aspetto si aggiunge anche la confusione tra l'unità di misura cm e i passi.

3.4.4) Nell'immagine sono rappresentate le lunghezze di due pezze di stoffa della stessa qualità; il lato di ogni quadretto della griglia rappresenta 1 m di stoffa. La seconda pezza costa 27 Fr. più della prima.



Quanto costa 1 m di quella stoffa?

Risposta: ....

Risposta corretta: 3 Fr.
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
8,7%	33,7%	57,6%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo risponde in modo corretto e non esplicita procedimenti sul foglio	4,9%
L'allievo risponde in modo corretto ed esplicita i calcoli che gli hanno permesso di trovare la soluzione	3,8%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo divide 27 per il numero di segmenti che rappresentano la stoffa più lunga	5,3%
L'allievo indica 13,5 Fr come prezzo richiesto	4,1%
L'allievo indica 27 Fr come prezzo richiesto	3,2%
L'allievo indica 10 Fr come prezzo richiesto	2,0%
L'allievo indica 54 Fr come prezzo richiesto	2,0%
Altro	17,1%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Analizza relazioni tra grandezze diverse in gioco (in particolare: perimetri e aree di figure).

Il quesito è il quarantatreesimo del secondo fascicolo; ipotizziamo quindi che la percentuale 57,6% di risposte mancanti sia dovuta principalmente alla mancanza di tempo.

Inoltre la situazione proposta è piuttosto complessa, per questo solo l'8,7% risponde correttamente.

Anche questo quesito prevede una risposta numerica univoca e, come il precedente, propone nello stimolo una rappresentazione figurale dalla quale estrapolare le informazioni necessarie.

Tra le difficoltà che si potrebbero incontrare vi è l'interpretazione del disegno: l'allievo deve immaginare che i due segmenti (con la doppia freccia) rappresentino le lunghezze delle due pezze di stoffa e che il lato di ogni quadretto indichi la lunghezza di 1 m. Osserviamo preliminarmente che la presenza della doppia freccia, assolutamente inutile al fine della risoluzione, potrebbe complicare l'interpretazione della figura. Inoltre i due segmenti misurano rispettivamente 8 e 17 lati di quadretti, circa uno la metà dell'altro; questo aspetto potrebbe indurre gli allievi a non contare i lati dei quadretti, bensì a stimare i due prezzi come l'uno la metà dell'altro.

Si osserva inoltre che nel testo è presente un "non detto": il prezzo al metro delle due stoffe è lo stesso ed è deducibile dal fatto che le due pezze sono della stessa qualità, ma non è dichiarato esplicitamente. In questo senso è interessante la distinzione, non sempre consapevole negli insegnanti, tra "implicito" e "non detto". Come ricorda Zan (2016), non sempre ciò che è "non detto" è anche "implicito":

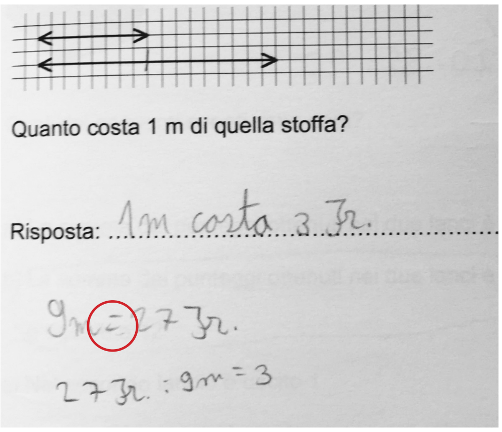
> «se leggo che Mario è salito sulla sua macchina, è ***implicito***, a meno che non sia detto esplicitamente il contrario, che la macchina abbia un motore e quattro ruote, mentre non è implicito (anche se è altrettanto non detto) che la macchina sia rossa. Finché non venga detto o fatto intuire qualcosa in merito – ammesso che ciò accada – posso immaginarla di qualsiasi colore».
>
> (p. 70)

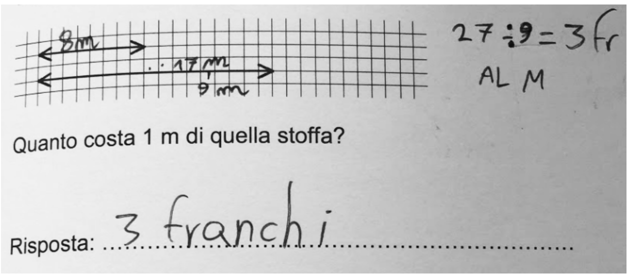
Solitamente, scrive Zan più avanti nel testo,

> «il motivo per cui una informazione viene considerata implicita fa riferimento a un altro tipo di conoscenza: quella delle "regole del gioco" dei problemi, che assume che in un problema sia sempre possibile fornire la risposta alla domanda, utilizzando i dati presenti nel testo».
>
> (p. 72)

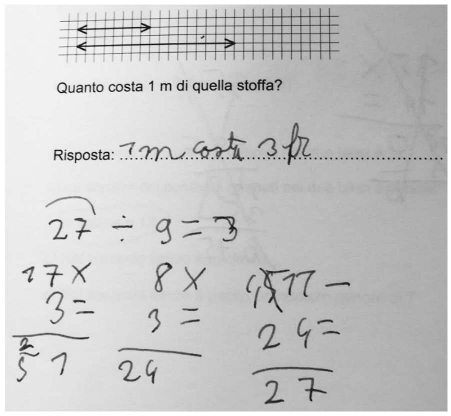
Dopo l'interpretazione corretta della rappresentazione, all'allievo si chiede di gestire la relazione tra i costi delle due pezze di stoffa, per cui è indicata la differenza tra le due. Come discusso per altri quesiti (quesito 3.3.1) la presenza della locuzione "più" viene interpretata da alcuni allievi come la necessità di operare un'addizione. Questa informazione invece dovrebbe condurre a valutare la differenza tra la lunghezza delle due stoffe in metri (ricavabile dall'immagine) e dunque dedurre, attraverso una divisione o un ragionamento proporzionale, il costo unitario al metro.

Di seguito si riportano alcuni protocolli di allievi che hanno fornito la risposta corretta.

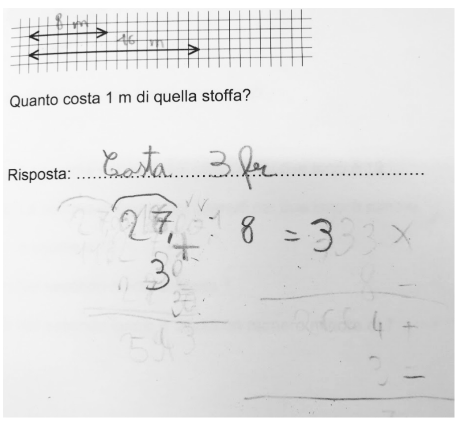


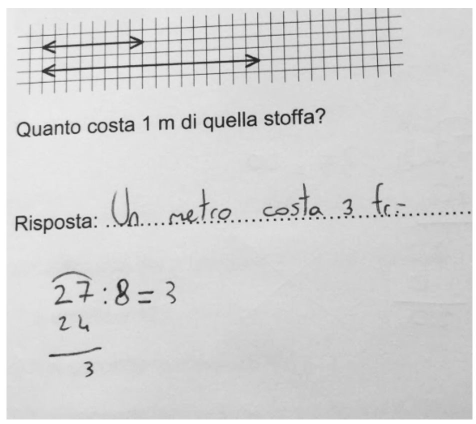


Dopo aver contato i segmenti i due allievi individuano il costo unitario richiesto. Osserviamo l'utilizzo inesatto del simbolo "=" nel primo protocollo; in questo caso l'allievo avrebbe dovuto utilizzare un simbolo diverso per intendere "corrisponde", "costa", ma non l'uguaglianza. Tuttavia il procedimento è corretto. Una volta trovata la soluzione alcuni allievi preferiscono verificare il risultato procedendo a ritroso come nel seguente caso.



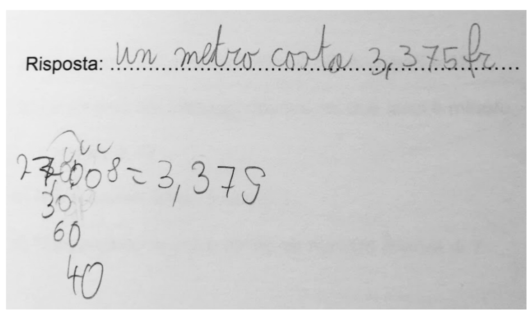
I protocolli seguenti riportano una soluzione numerica corretta, ossia 3 franchi, ma un procedimento "insolito".





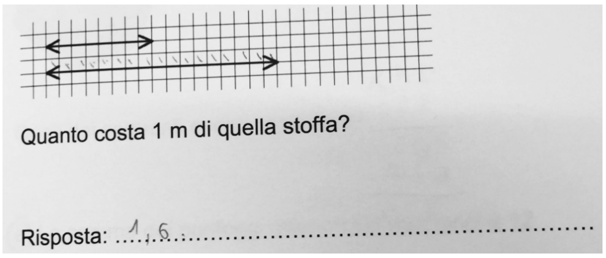
Entrambi gli allievi dividono 27 per 8, invece che per 9, trovando 3 con resto 3 e riportano la soluzione corretta, 3. È interessante osservare che, pur ammettendo un'eventuale soluzione decimale (il valore monetario ammette anche misure decimali), essi scelgono di approssimare all'unità.

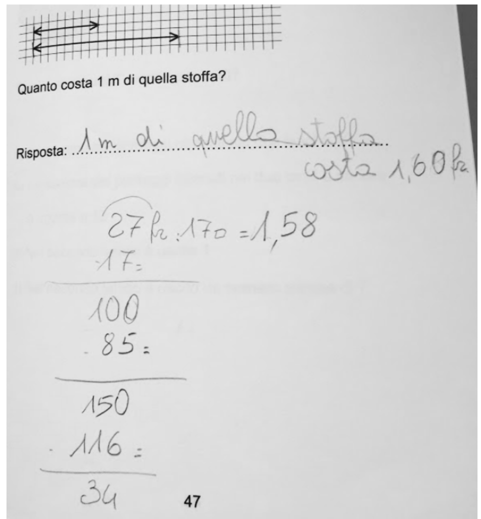
Come si evince dal protocollo a fianco, c'è invece chi opera nello stesso modo e riporta il risultato di calcolo numericamente corretto (effettivamente 27 : 8 = 3,375), che però è considerato sbagliato ai fini della codifica di questo quesito.



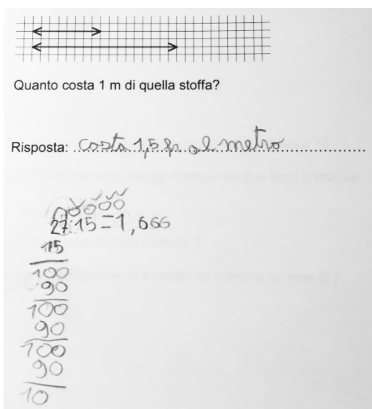
Da questi protocolli non è evidente se la divisione per 8 sia dovuta al fatto che l'allievo considera la lunghezza della pezza di stoffa più corta oppure tiene conto della differenza di lati di quadretti tra i due segmenti ma sbaglia a contare (invece di 9 conta 8).

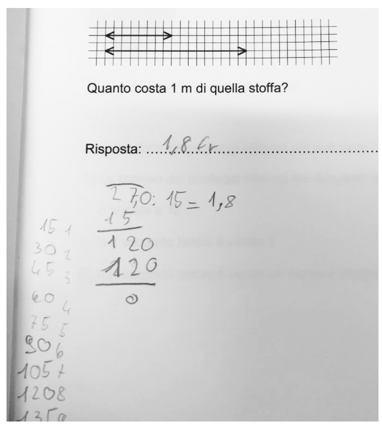
Tra le risposte errate, il 5,3% fornisce il risultato della divisione tra 27 e il numero di lati di quadretti contati sul segmento più lungo. Questi allievi dimostrano una lettura superficiale del testo, ignorando completamente la parte "più della prima" contenuta nello stimolo: "La seconda pezza costa 27 Fr. più della prima", che è in realtà fondamentale per capire la relazione che lega i costi delle due pezze di stoffa. I risultati ottenuti non sono univoci a causa di errori di conteggio già sottolineati in precedenza. I protocolli seguenti mostrano, nel primo caso, il conteggio dei lati dei quadretti e nel secondo, il calcolo in colonna della divisione 27 : 17 fino alla seconda cifra decimale.



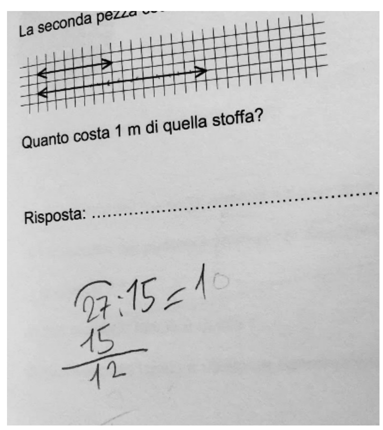


Di seguito si riportano due protocolli che mostrano la risoluzione (rispettivamente errata e corretta) della divisione 27 : 15.

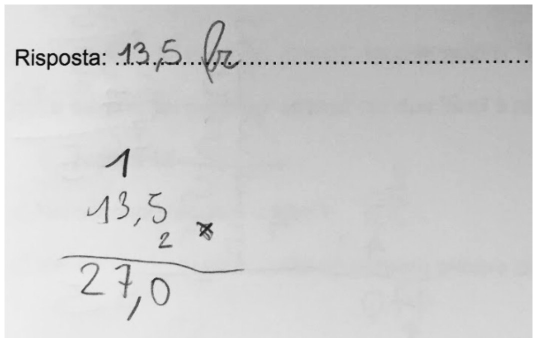




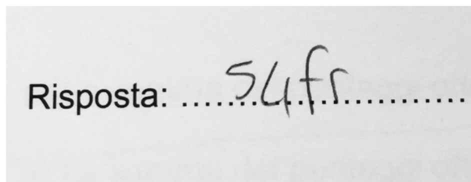
Dal protocollo a fianco si evince l'origine del numero 15: l'allievo si ferma a contare i tratti del segmento più lungo prima della freccia, come evidenziato dai segni lasciati su ciascun tratto.



Il 4,1% fornisce la risposta 13,5. Un esempio è mostrato nel seguente protocollo. L'allievo dimezza 27, commettendo alcuni errori legati all'interpretazione delle informazioni e probabilmente fuorviato dall'immagine che rappresenta due segmenti molto vicini all'essere l'uno la metà dell'altro.



Analogamente, il 2,0% degli allievi fornisce la risposta 54, questa volta raddoppiando il 27.



Possiamo ipotizzare che le difficoltà riscontrate siano simili a quelle individuate in precedenza. In modo simile a quanto già visto in altri quesiti, si osserva come un controllo a posteriori sul senso del numero trovato, avrebbe indotto l'allievo a ragionare sul fatto che il costo di un metro di stoffa non poteva superare i 27 franchi.

Il 3,2% risponde 27, riproponendo dunque il numero presente nel testo. Il 2,0% fornisce la risposta 10, probabilmente dovuta ad errori di calcolo. Nella categoria "Altro" troviamo risposte varie del tipo: 7,5; 2; 4; 3 m; 2700; 16; 84.

Seconda somministrazione.
Il quesito è stato somministrato anche agli allievi di prima media e di seguito si riportano i risultati.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	8,7%	6,9%
Risposte errate	33,7%	31,6%
Risposte mancanti senza motivazione	57,6%	37,4%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	24,1%

Le percentuali di risposte corrette ed errate sono molto simili, inoltre nella seconda somministrazione ben il 24,1% dichiara esplicitamente di non aver compreso il testo del problema. Questo è un dato interessante perché mostra come quasi un allievo su quattro si sia fermato, perché non riusciva a interpretare le informazioni. Le risposte errate possono essere così suddivise:

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo divide 27 per il numero di segmenti che rappresentano la stoffa più lunga	5,3%	5,2%	7
L'allievo indica 13,5 Fr. come prezzo richiesto	4,1%	5,2%	4
L'allievo indica 27 Fr. come prezzo richiesto	3,2%	1,1%	0
L'allievo indica 10 Fr. come prezzo richiesto	2,0%	2,3%	1
L'allievo indica 54 Fr. come prezzo richiesto	2,0%	0,6%	0
Altro	17,1%	17,2%	10

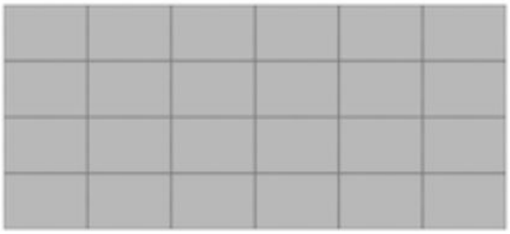
Di seguito si riportano alcuni stralci di interviste agli allievi di prima media.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
27 : 2 = 13,5	I.: "Potresti spiegarmi perché hai fatto 27 : 2?" A.: "Qui ho letto, solo che penso che ho letto male, di un pezzo di stoffa allora qui ho letto la seconda allora ho pensato che erano due allora ho fatto 27 : 2."
27 : 17	I.: "Era difficile?" A.: "Sì." I.: "Allora guardiamolo così mi racconti. Perché era difficile?" A.: "Qua ti chiede la seconda pezza costa 27 franchi in più della prima e ogni quadretto è un metro allora io ho pensato di fare 27 che sono i franchi che costa al metro no che costa la pezza diviso 17 che sono i metri, che dovrebbe fare il prezzo di un quadretto." I.: "Ma 27 sei sicuro che sia il prezzo della stoffa lunga?" A.: "La seconda pezza costa 27 franchi." I.: "Più della prima." A.: "Ahhhh!"

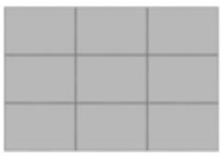
1,5	I.: "Tu hai detto 1,5, mi puoi spiegare come hai fatto?" A.: "Ho fatto più o meno se era 15 se un metro di stoffa costava 2 franchi sarebbe arrivato a 30 però visto che la seconda pezza costava più della prima allora ho abbassato un po' e ho fatto 1,5." I.: "Quindi 27 franchi cos'è?" A.: "Il prezzo della stoffa lunga." I.: "Ti chiedo di rileggere la frase." L'allievo legge il testo. I.: "Cosa significa questa frase?" A.: "Che questa qua è più lunga di questa e costa anche di più."

Da queste interviste deduciamo alcune considerazioni che dall'analisi dei protocolli non erano evidenti. Il primo allievo dichiara di dimezzare 27 perché le stoffe sono due, ignorando dunque tutte le informazioni date sia dall'immagine che dal testo. Il secondo conferma quanto avevamo già ipotizzato in precedenza: una lettura selettiva del testo comporta la cancellazione di alcune informazioni a fronte di altre da lui ipotizzate (la seconda pezza costa 27 franchi). La terza intervista fa emergere un'ulteriore strategia adottata, quella di procedere per stima e per tentativi. Tuttavia l'allievo commette diversi errori legati al conteggio dei tratti e ad una mancata comprensione di cosa rappresentano i 27 franchi.

3.4.5) Sergio, il golosone, si è mangiato ⅔ di una tavoletta di cioccolata come quella rappresentata.

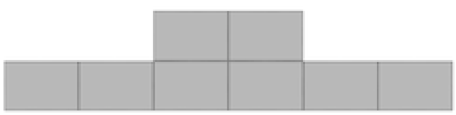


Nelle seguenti figure sono rappresentate delle parti di tavoletta. Una di esse corrisponde a quanto non ha mangiato Sergio. Indicala con una crocetta.

a) 

b) 

c) 

d) 

Risposta corretta: d
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
21,6%	10,8%	6,3%	48,8%	12,5%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicira procedimenti sul foglio	40,2%
L'allievo svolge alcuni calcoli o manipola le figure	8,6%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita procedimenti sul foglio	36,0%
L'allievo svolge alcuni calcoli e manipola le figure	2,7%

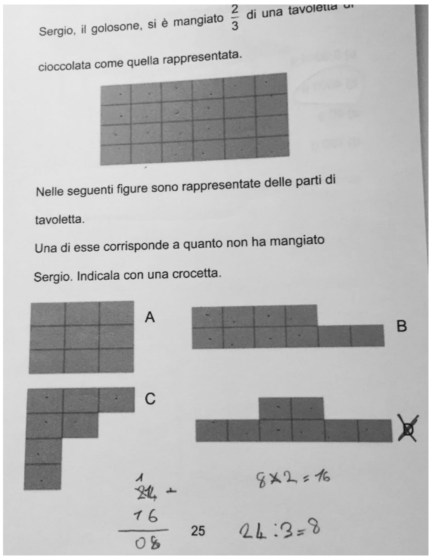
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza*: Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico in rappresentazioni grafiche che ne esprimono la struttura.

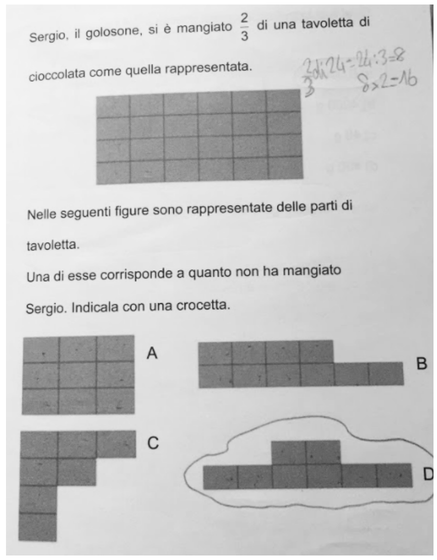
Il quesito è il ventunesimo del primo fascicolo ed è uno dei pochi dell'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* che coinvolge la conoscenza delle frazioni. L'allievo è chiamato a matematizzare e modellizzare la situazione, cercando di individuare quale delle figure mostrate rappresenta ⅓ della tavoletta iniziale, richiedendo dunque di «tradurre una situazione di tipo aritmetico in rappresentazioni grafiche che ne esprimono la struttura» (DECS, 2015, p. 151). La tavoletta è un rettangolo suddiviso in 24 parti congruenti e il quesito chiede di individuare tra le 4 opzioni mostrate quella corrispondente alla parte non mangiata. Una difficoltà che gli allievi potrebbero incontrare è di tipo linguistico, legata all'avverbio di negazione "non"; risulta dunque fondamentale non lasciarsi confondere dalla frazione presente nel testo (⅔) ma interpretare correttamente la richiesta, individuando la frazione complementare ⅓ . Dopodiché l'allievo deve essere in grado di individuare la rappresentazione grafica coerente con la richiesta. In questo caso le difficoltà potrebbero anche essere legate alle forme delle tavolette delle quattro opzioni. Le consuete routine didattiche, spesso, si basano sul definire impropriamente il frazionare come una suddivisione di un intero in parti uguali, intese come congruenti, e la frazione come una o più di queste parti, non abituando così gli allievi a concepire suddivisioni che soddisfano un determinato criterio pur non essendo congruenti (equinumerose, equiestense, equivolumetriche ecc.) (Fandiño Pinilla, 2005a). Gli allievi che tendono a ragionare in questo modo sono spinti a suddividere il rettangolo iniziale in modo da ottenere tre parti congruenti, ma poi hanno difficoltà a ritrovarsi in una delle quattro opzioni proposte. Inoltre, gli esercizi sulle frazioni proposti solitamente si basano su figure standard, rendendo la trattazione del tema incompleta e fonte di misconcezioni per gli allievi. Il privilegiare figure standard (come rettangoli, cerchi, quadrati, solo raramente triangoli) è una pratica assai pericolosa dal punto di vista didattico, perché genera l'idea che si possono trovare le frazioni solo di queste figure e non di altre e che la parte individuata deve essere necessariamente di forma standard o risultato di una certa simmetria. Infatti, anche in questo caso, la risposta sbagliata più scelta è stata l'opzione a) basata su un rettangolo, piuttosto che su poligoni con un numero maggiore di lati.

Poiché la caratteristica su cui porre l'attenzione è l'estensione delle figure, e non la forma, per rispondere al quesito occorre concentrarsi sul numero di parti in cui sono suddivise. Poiché la tavoletta è frazionata in 24 parti congruenti, il problema di individuarne nel continuo consiste nel calcolare ⅓ di 24, ossia 8 parti. Dunque la soluzione sarebbe stata da ricercare in quelle figure costituite da 8 parti. L'unica opzione possibile è quindi la d), dato che la figura a) è costituita da 9 rettangolini, la b) da 10 e la c) da 7.

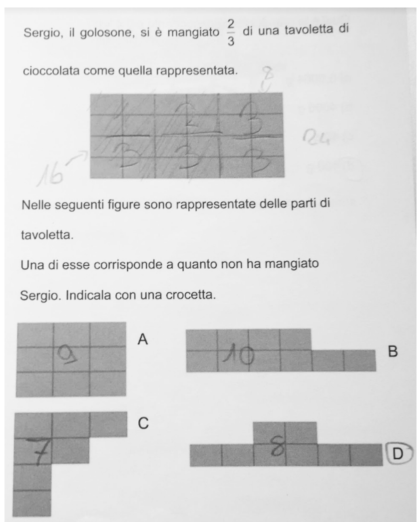
Meno della metà degli allievi fornisce la risposta corretta, nonostante sia una domanda a risposta chiusa e il tema sia uno di quelli centrali in un secondo ciclo. Di seguito si riportano alcuni protocolli di allievi che hanno risposto correttamente.

Nei due protocolli della pagina seguente vengono esplicitati i calcoli effettuati per trovare la soluzione. In entrambi, l'allievo calcola i ⅔ di 24 e nel primo caso indica anche la sottrazione per trovare quanta cioccolata non ha mangiato Sergio. In nessuno dei due casi l'allievo trova la frazione complementare e poi la corrispondente quantità di tavoletta.

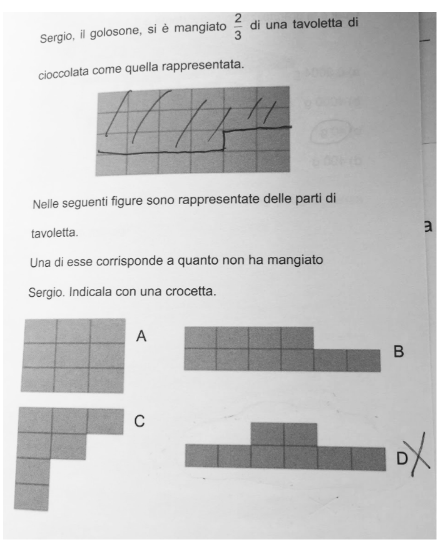


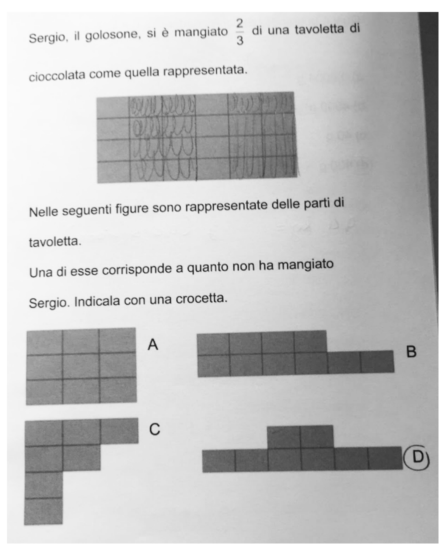


Alcuni esplicitano il numero di parti in cui sono suddivise le diverse figure delle opzioni e scelgono l'opzione corretta d), come nel seguente protocollo. In questo caso è interessante notare come l'allievo abbia lavorato dapprima sulla tavoletta iniziale rappresentando le frazioni ⅓, ⅔ e ³⁄₃ dell'intera tavoletta, suddividendo il rettangolo in modo standard. Poi si è focalizzato sul numero di parti che corrispondono a ⅓ della cioccolata e ha segnato dunque la scelta corretta.

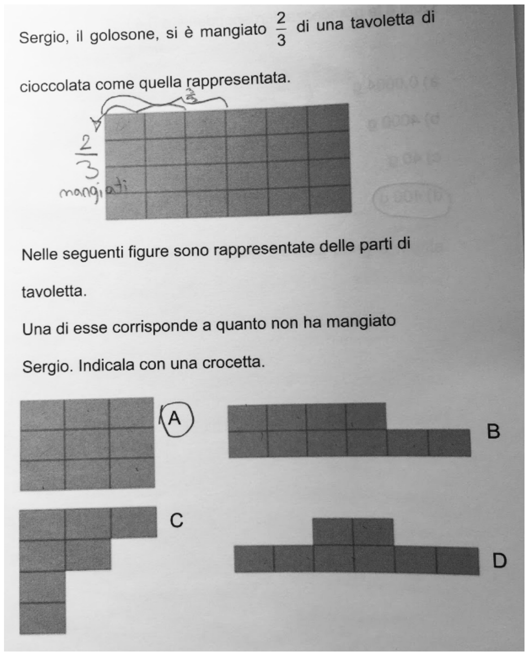


Nei seguenti protocolli, invece, gli allievi disegnano suddivisioni differenti, ma sempre coerenti con la frazione richiesta.

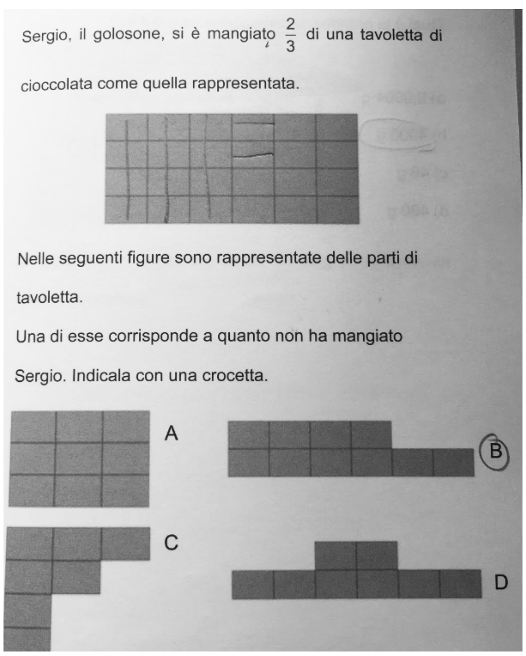


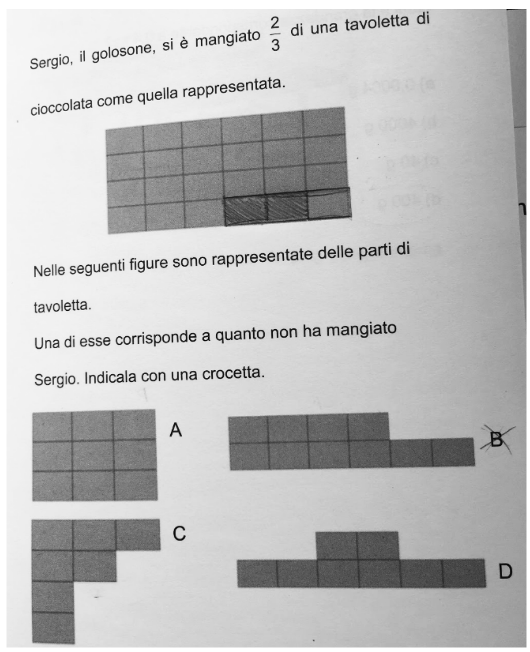


Tra le risposte sbagliate più scelte, come già anticipato, vi è l'opzione a); tra le quattro, oltre ad essere la prima scelta, è l'unica che ricorda la forma della tavoletta di cioccolata iniziale. Nel seguente protocollo l'allievo mostra di possedere un'errata concezione dell'intero, segnando in modo scorretto i 3/3 e sbagliando, di conseguenza, anche a individuare i "2/3 mangiati".

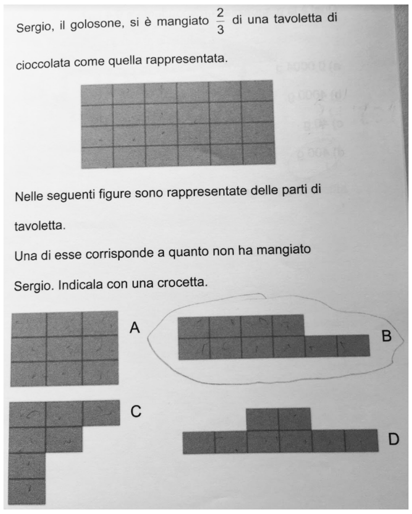


Il 10,8% indica la scelta b). Nei seguenti due protocolli gli allievi disegnano in modo quasi esplicito quello che secondo loro rappresenta la frazione richiesta. Si osservi come il protocollo di destra disegni correttamente i 2/3 , ma non dell'intero di riferimento, ossia di tutta la tavoletta di cioccolata, bensì di una sua parte costituita esattamente da 3 rettangoli piccoli.

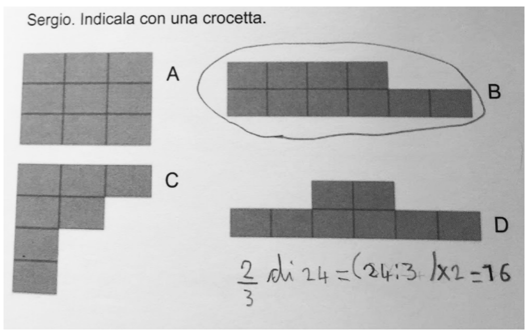




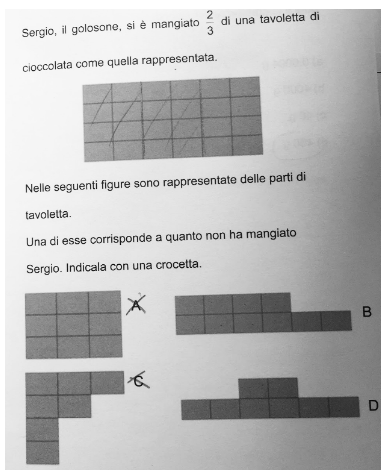
Nella pagina seguente si riporta un protocollo in cui si mostra la scelta errata derivante dal conteggio dei rettangolini in ciascuna figura, ma non è possibile risalire a quali siano le reali difficoltà dell'allievo.



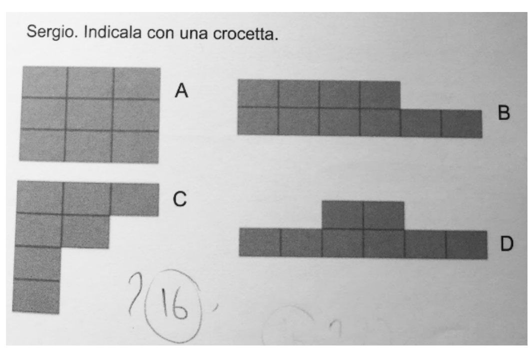
Infine si riporta un altro protocollo in cui l'allievo dimostra di aver individuato una strategia di calcolo corretta per individuare i ⅔ dell'intero, ma non della frazione complementare ⅓; per questo forse la scelta finale dell'allievo ricade sul numero che si avvicina di più a 16.



Il 6,3% indica la scelta c) e il 12,5% non risponde oppure fornisce una risposta non valida, tipicamente basata sull'individuazione di più di un'opzione, come nel protocollo seguente.



Vi sono anche casi in cui gli allievi scelgono di non rispondere, facendo trapelare dai segni sul protocollo la difficoltà a trovare la risposta corretta, come evidenziato nel protocollo a fianco. Come per il protocollo precedente, l'allievo individua 16 probabilmente calcolando i ⅔ dei rettangolini della tavoletta, ma non individua nessuna figura tra le opzioni che contenga 16 rettangolini. Anche in questo caso l'allievo non considera che si richiedeva la frazione complementare, essendoci l'avverbio "non".



Seconda somministrazione.
Per poter indagare con più profondità le motivazioni alla base delle diverse scelte degli allievi, il quesito è stato somministrato anche agli studenti di prima media. Nella tabella seguente sono riportati i risultati delle due somministrazioni messi a confronto.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	48,8%	40,8%
Risposte errate	38,7%	43,7%
Risposte mancanti senza motivazione o non valide	12,5%	12,1%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	3,4%

Dalla significativa presenza di risposte errate si evince come gli allievi dimostrino di arrivare i primi giorni di scuola media con delle lacune sui concetti legati alle frazioni; un tema tradizionalmente ostico, da trattare con una notevole attenzione didattica nella scuola elementare e da riprendere e approfondire successivamente.
Nella seguente tabella riportiamo le percentuali di risposta per ogni opzione.

Descrizione categorie errate	**Percentuale prima somministrazione (V SE)**	**Percentuale seconda somministrazione (I SM)**	**N. studenti intervistati**
a)	21,6%	26,4%	12
b)	10,8%	10,9%	4
c)	6,3%	6,3%	6
d)	48,8%	40,8%	-

Di seguito si riportano alcuni interessanti stralci di interviste. Iniziamo da coloro che scelgono la risposta a).

Risposta fornita	**Trascrizione dell'intervista**
a)	I.: "Prova a colorare i ⅔ di questa tavoletta." A.: "Questa riga e questa riga" (indica le prime due righe). I.: "Come hai fatto a trovarlo." A.: "Io ho pensato che era questa ma poi ero anche un po' in difficoltà perché la tavoletta non è in terzi, quindi non si potrebbero trovare i ⅔." I.: "Quindi in questo caso come potremmo fare?" A.: "Si dovrebbe togliere un pezzo della tavoletta e farla diventare solo con il terzo, tre pezzi."

a)	I.: "Come hai fatto a trovare i ⅔ di questa tavoletta?" A.: "Ho contato 2 e poi 3 in profondità" (indicando due rettangolini in orizzontale e tre in verticale). I.: "Ah ho capito! E perché non due in verticale e tre in orizzontale?" A.: "Boh." I.: "Sarebbe stata la stessa cosa per te fare in un altro modo?" A.: "Sì."
a)	I.: "Cosa ti chiede la domanda?" A.: "Una di esse corrisponde a quanto ha mangiato Sergio." I.: "Sei sicuro?" L'allievo rilegge il testo. A.: "Quanto non ha mangiato Sergio, ah! Io ho capito quanto ha mangiato Sergio!"

Dai primi due stralci di interviste di coloro che rispondono a), emerge la necessità di individuare il numero di parti coincidenti con il numeratore e il denominatore della frazione ⅔, senza riuscire a concepire frazioni equivalenti alla frazione data.
Si evince la tendenza a voler ritrovare modelli di frazione probabilmente già visti in classe. È molto frequente proporre figure frazionate in modo da avere parti congruenti ed esattamente nel numero indicato dal denominatore. L'uso esclusivo di questi esercizi rafforza la misconcezione basata sull'idea che sia possibile individuare una frazione solo di figure suddivise in base a quanto indicato esattamente dal denominatore. Tale erronea convinzione può diventare così radicata nell'allievo da spingerlo a "tagliare" la tavoletta e a fare in modo di ritrovarsi in una situazione già nota. La seconda intervista è interessante perché fornisce una possibile chiave di lettura del secondo protocollo di p. 121 individuato dal campione della scuola elementare, dove sono presenti alcuni segni orizzontali e alcuni verticali. L'allievo in quel caso potrebbe aver identificato il denominatore (3) con il numero di rettangolini in verticale, opportunamente segnati da trattini e il numeratore (2) con il numero di rettangolini in orizzontale, sempre indicati da tratti.
Dalla terza intervista emerge invece la poca attenzione nella lettura del testo, basata sul non considerare l'avverbio "non".
Si riportano di seguito le interviste di due allievi che rispondo b).

Risposta fornita	**Trascrizione dell'intervista**
b)	I.: "Come hai ragionato?" A.: "Allora, ho guardato un po' questa tavoletta, ma non capivo un po'... allora io dovevo togliere i ⅔ ma io ho tolto solo il 2, così (indicando i due rettangolini che mancano alla figura b) per formare un rettangolo)." I.: "Ah questa parte che manca dici?" A.: "Sì, esatto."

b)	I.: "Come mai hai scelto la b)?" A.: "Qui la tavoletta è di 24 e la devi dividere in 3 perché ⅔, che fa 8, e allora quelli che non ha mangiato, perché lui ha mangiato ⅔, sono 8 che sono rimasti." I.: "Quanti sono questi? indicando i rettangolini della figura b)." A.: "2, 4, 6, 8…ah ho sbagliato a contare!" I.: "Quindi quale sarebbe quella giusta?" A.: "La d)."

Il primo dimostra di aver scelto la risposta in base ad una idea profondamente scorretta di frazione. I numeri presenti nella frazione ⅔ sono trattati dall'allievo singolarmente, ossia come se fossero due numeri naturali uniti da un segno in mezzo - come aveva già evidenziato Brousseau fin dagli anni '80 - e non nel loro significato di frazione, come rappresentazione di un numero razionale. Questo allievo decide di togliere 2 e non ⅔ dalla tavoletta di cioccolata e nella scelta tra le quattro opzioni si lascia influenzare dalla forma delle figure, scegliendo quella dove mancano esattamente due parti per completare un rettangolo (tra l'altro diverso da quello iniziale). Il secondo, invece, adotta un ragionamento corretto e lo sa esplicitare in modo chiaro, ma si accorge di aver effettuato un errore nel conteggio.

Il seguente allievo, invece, che risponde con l'opzione c), mette in evidenza una scelta per esclusione basata sull'errata convinzione che tutte le parti in cui si deve suddividere un intero debbano essere congruenti.

Risposta fornita	**Trascrizione dell'intervista**
c)	I.: "Perché hai risposto c)?" A.: "Mi sembrava quella più giusta." I.: "Perché ti sembrava quella più giusta?" A.: "Perché la prima non andava bene perché ci sta solo due volte." I.: "Quante volte ci dovrebbe stare?" A.: "3." I.: "Perché proprio tre volte?" A.: "Guardo il 3 del ⅔ ." I.: "La b) e la d) perché non ti piacevano?" A.: "Non mi sembravano tanto giuste." I.: "Perché?" A.: "Non lo so."

3.4.6) Immagina che oggi sia il 24 marzo e che fra 18 giorni, da oggi non compreso, Samuele partirà dall'aereoporto di Zurigo per una vacanza in Cina. Qual é la data scritta sul suo biglietto aereo Zurigo-Pechino?

Risposta: ………………………………………………………………………………………………..

Risposta corretta: 11 aprile
Risutati:

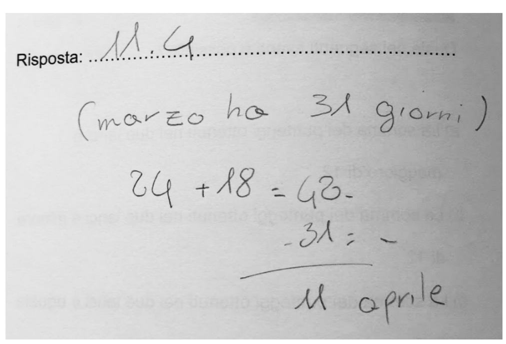
Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
42,3%	40,6%	17,1%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo risponde in modo corretto e senza esplicitare alcun procedimento	36,8%
L'allievo risponde in modo corretto esplicitando il procedimento	4,7%
L'allievo risponde in modo corretto esplicitando una strategia di conteggio dei giorni attraverso una rappresentazione (di segni o di numeri)	0,8%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica come risultato il 12 aprile, esplicitando o meno il procedimento	16,2%
L'allievo indica come risultato il 10 aprile senza esplicitare il procedimento	2,4%
L'allievo indica come risultato l'11 maggio	2,0%
L'allievo indica come risultato 41 oppure 42 oppure 43	2,0%
L'allievo indica come risultato il 1 aprile	1,8%
Altro	16,2%

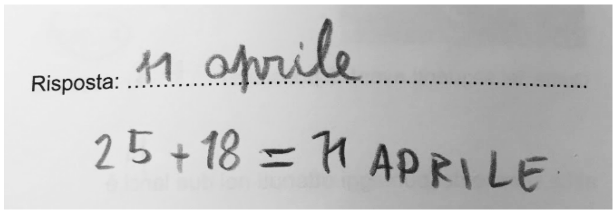
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Il quesito è il sedicesimo del secondo fascicolo e registra il 17,1% di risposte mancanti, una percentuale piuttosto alta se si considera la posizione nel fascicolo.

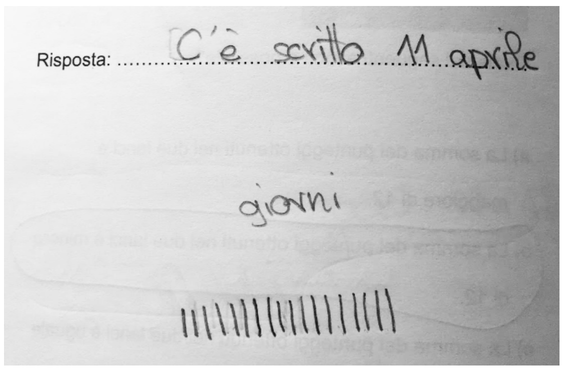


La risoluzione richiede un'addizione in aritmetica finita. Non basta svolgere 24 + 18, è necessario tener conto che il mese di marzo ha 31 giorni, dunque non è possibile individuare il giorno 42 (24 + 18).

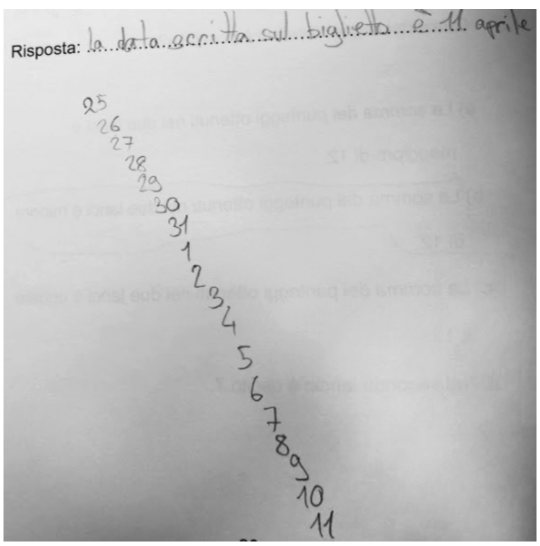
Il 42,3% fornisce la risposta corretta. Il protocollo a fianco mostra l'operazione effettuata dall'allievo che addiziona a 24 il numero 18, ma poi tiene conto del fatto che il mese di marzo ha 31 giorni. Anche quello seguente riporta la risposta corretta, anche se non esplicita il passaggio in aritmetica finita.

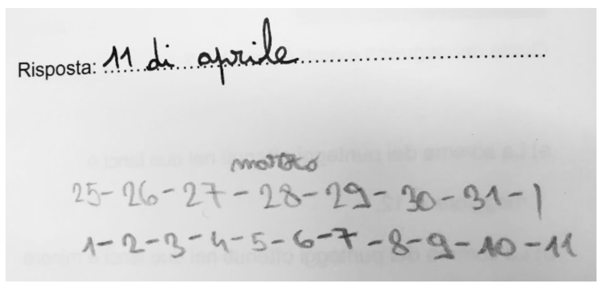


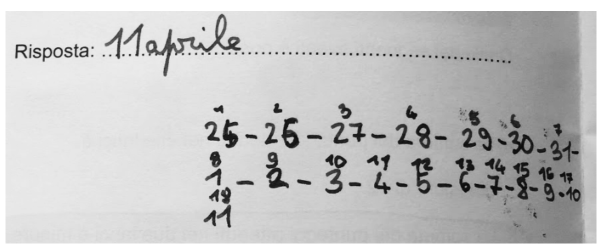
Alcuni allievi adottano rappresentazioni grafiche che sono risultate di aiuto nel conteggio, come mostra il seguente protocollo



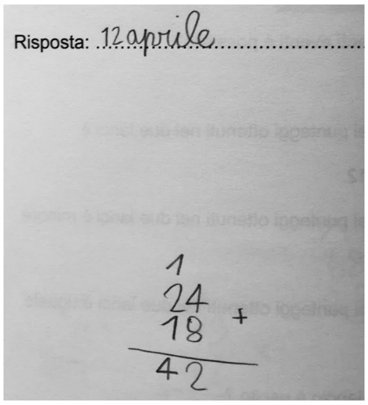
o un'elencazione esplicita dei giorni, come nei seguenti protocolli.

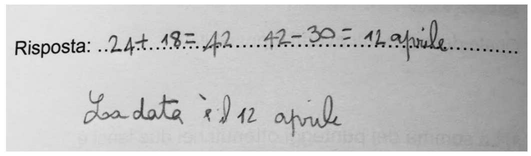




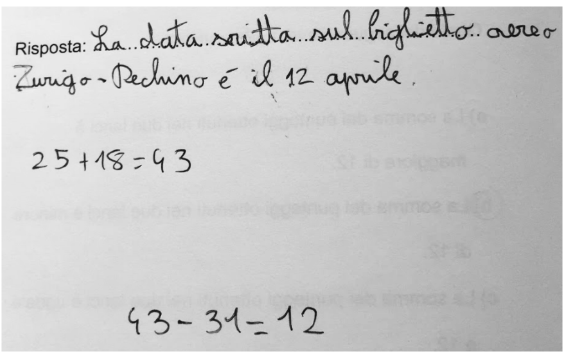


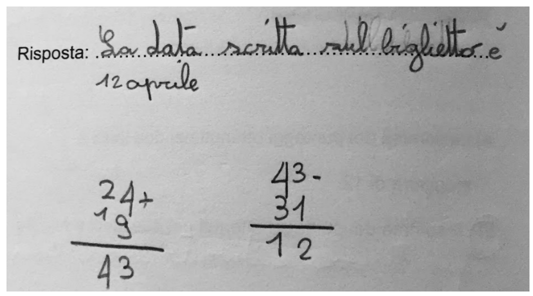
La risposta sbagliata più frequente è 12 aprile (16,2%). Essendo un giorno contiguo a quello corretto, l'errore potrebbe essere dovuto ad un'inesattezza nel calcolo, oppure ad una non conoscenza del numero di giorni nel mese di marzo, oppure ad una incomprensione dell'espressione "da oggi non compreso". L'analisi di alcuni protocolli può favorire un'indagine più puntuale.
I protocolli della pagina seguente mostrano, ad esempio, una non conoscenza del numero di giorni del mese di marzo. Nonostante, dunque, adottino una strategia formale (utilizzo dell'addizione in aritmetica finita nel secondo protocollo) commettono un errore legato ad una conoscenza di base.





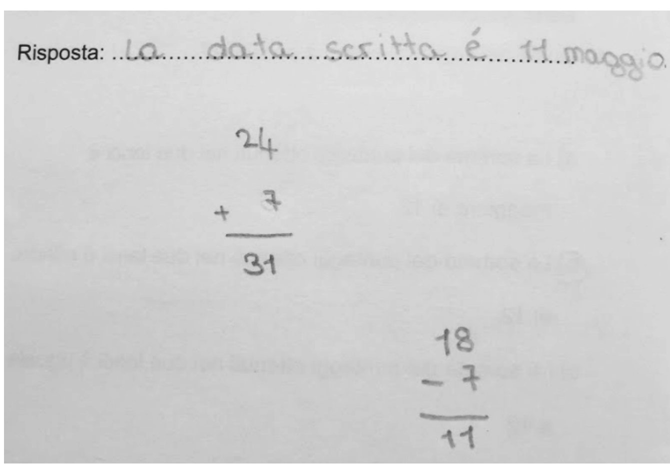
Di seguito si riportano due protocolli: nel primo caso l'allievo aggiunge 19 giorni invece di 18, mentre nel secondo l'allievo considera il giorno 24. I due errori potrebbero essere dovuti ad una distrazione, tuttavia non è da escludersi, soprattutto nel protocollo di destra, che ci sia stata una difficoltà a gestire la locuzione "da oggi non compreso". Essendo il 24 non compreso, nell'addizione non si dovrebbe partire da quel numero ma dal successivo.



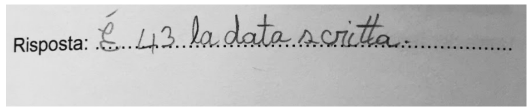


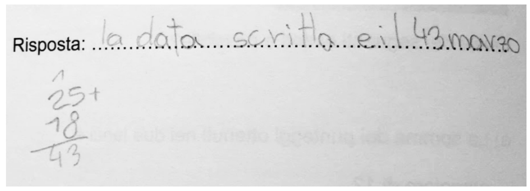
In modo analogo potrebbe essere giustificata la risposta 10 aprile. In questo caso però non abbiamo protocolli che mostrano il procedimento.

Il 2,0% degli allievi commette un errore non nel giorno, bensì nel mese; invece di scrivere 11 aprile, indica come soluzione 11 maggio. Anche in questo caso l'origine dell'errore potrebbe essere una distrazione oppure una mancanza di conoscenze di base (sequenza dei mesi dell'anno). Nel protocollo seguente è però interessante osservare la strategia risolutiva dell'allievo che individua il numero di giorni che mancano alla fine del mese e li sottrae al numero totale di giorni di vacanza.



Il 2,0% fornisce come risposta 41, 42 o 43, a seconda dell'errore commesso o nel calcolo o nell'impostazione dell'addizione. Queste risposte evidenziano una mancanza di consapevolezza dell'insieme numerico in cui si sta operando, finito, trattandosi di mesi, e quindi diverso dall'insieme ℕ dei numeri naturali.

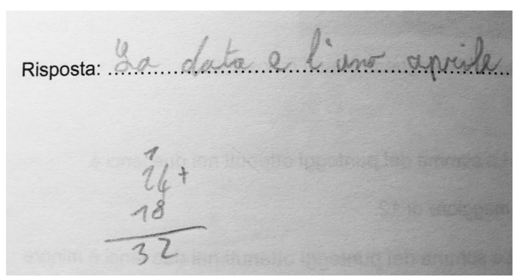




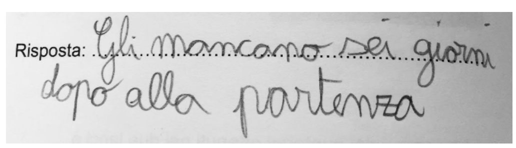
I protocolli qui a fianco mostrano questo tipo di risposte. Mentre nel primo è riportato solo il numero ottenuto presumibilmente dall'addizione 25 + 18, nel secondo l'allievo fornisce la risposta completa "43 marzo".
Nonostante l'inesistenza di questa data, l'allievo la scrive, non preoccupandosi del senso della sua risposta. Questo atteggiamento, come illustrato dalla ricerca in didattica della matematica, entra in gioco molto spesso nella vita d'aula ed è stato più volte rilevato anche in questo rapporto. Si tratta di una clausola del contratto didattico, chiamata *delega formale*, basata sul delegare all'algoritmo il compito di risolvere il problema, rinunciando a interpretare il processo risolutivo scelto e il risultato ottenuto. Qualsiasi sia il risultato ottenuto dall'algoritmo, questo viene trascritto dall'allievo senza che ci sia una riflessione sul senso della risposta fornita.

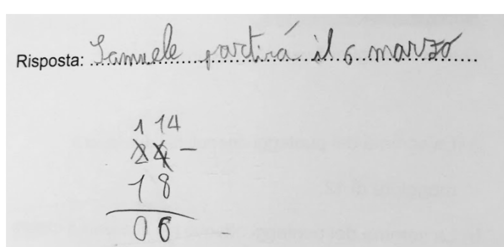
> «A questo punto scatta la delega formale: non tocca più allo studente ragionare e controllare, sia che faccia il calcolo a mente, tanto più se lo fa con la calcolatrice, ma si instaura la clausola che disimpegna le facoltà razionali, critiche e di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o alla calcolatrice risolvere il problema. Il compito successivo dello studente sarà di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi».
>
> (D'Amore, 1999, p. 110)

D'altronde, come evidenziato nel paragrafo 2.3. a pp. 31-32, la fase di interpretazione del risultato ottenuto da un algoritmo è una delle meno curate da parte degli allievi e dalle stesse pratiche didattiche che solitamente non si soffermano abbastanza sui processi di controllo che dovrebbero essere messi in atto dagli allievi. In questo caso, se lo studente si fosse accorto della mancanza di senso di quello che ha scritto, ritornando sul risultato ottenuto, avrebbe probabilmente ripercorso il suo ragionamento cogliendone un eventuale errore.



L'1,8% degli allievi scrive 1 aprile, una risposta anomala perché difficilmente riconducibile agli errori già discussi. Tuttavia il protocollo a fianco chiarisce questa scelta. L'allievo sceglie correttamente l'operazione da svolgere, interpreta in modo giusto il risultato ottenuto (32 diventa 1 aprile), ma commette un errore nell'algoritmo, basato sul non considerare il riporto.





Nella categoria "Altro" sono presenti risposte di vario tipo, alcune riconducibili ad errori di matematizzazione nella fase di formulazione dell'operazione risolutiva. Ad esempio nei due protocolli a fianco gli allievi svolgono una sottrazione tra i due numeri presenti nel testo.

3.4.7) Calcolare $\boxed{2 \times 3}$ x $\boxed{3 \times 4}$ è come fare 4 x 12.

Completa in modo analogo:

Calcolare 2 x 2 x 3 x 3 x 4 x 5 è come fare

30 x $\boxed{}$

Risposta corretta: 24
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
8,5%	32,7%	58,8%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo riporta il risultato corretto senza esplicitare il procedimento	3,3%
L'allievo riporta il risultato corretto moltiplicando tutti i fattori e dividendo il risultato per 30	2,7%
L'allievo riporta il risultato corretto mostrando un procedimento che elimina gli elementi della fattorizzazione di 30	1,8%
L'allievo riporta il risultato corretto procedendo per tentativi alla ricerca del fattore che moltiplicato per 30 restituisce 720	0,7%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica la risposta 720 ottenuto moltiplicando tutti i fattori	3,0%
L'allievo indica la risposta 33	2,6%
L'allievo indica la risposta 3	1,8%
Altro	25,3%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Matematizzare situazioni aritmetiche e combinatorie concrete a partire da esempi di risultati possibili su cui riflettere.

Il quesito è l'ultimo del primo fascicolo e registra la più alta percentuale di risposte mancanti (58,8%). Lo stimolo presenta un esempio da seguire per completare in modo analogo l'esercizio. La tipologia di quesito è particolarmente interessante perché richiede all'allievo l'utilizzo dell'analogia per rispondere alla domanda. Il ricorso all'analogia nell'insegnamento-apprendimento della matematica è incentivato da diversi autori (Stavy & Tirosh, 2001; Fischbein, 1985b; Sbaragli et al., 2008a). Come evidenziato in Sbaragli, Cottino, Gualandi, Nobis, Ponti, & Ricci (2008b): «Stavy e Tirosh (2001) sostengono l'importanza dell'analogia, affermando che lo scopo primario dell'insegnamento matematico e scientifico è quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la conoscenza da un caso specifico ad altri» (p. 79). Bazzini (1995) sostiene l'importanza del pensare per analogia, reputandola una strategia fondamentale nella costruzione del sapere, utilizzando ciò che si sa per apprendere ciò che ancora deve essere acquisito. In quest'ottica il pensare per analogia, secondo l'autrice, aiuta a organizzare le nuove conoscenze, a recuperare quelle archiviate in memoria e a creare nuovi schemi concettuali. Tuttavia Bazzini (1995) sottolinea la necessaria cautela che è indispensabile adottare nel far uso dell'analogia:

> «Il ragionamento analogico da una parte richiede e dall'altra stimola la flessibilità mentale, facilitando l'apprendimento. Come abbiamo già osservato, si tratta dunque di liberare la conoscenza "inerte" e utilizzarla in situazioni nuove. Naturalmente, l'uso dell'analogia nell'istruzione non è esente da rischi e non per niente l'analogia è stata definita una "lama a doppio taglio". Proprio per questo è necessaria un'analisi attenta delle unità didattiche programmate che permetta all'insegnante di favorire un uso produttivo del ragionamento analogico, prevenendo anche le possibili insidie».
>
> (citato da Sbaragli et al., 2008a, pp. 26-27)

Fischbein (1987, 1989) osservava che l'uso dell'analogia potrebbe essere causa di misconcetti o fraintendimenti. Da questo punto di vista Sbaragli (2006) commenta:

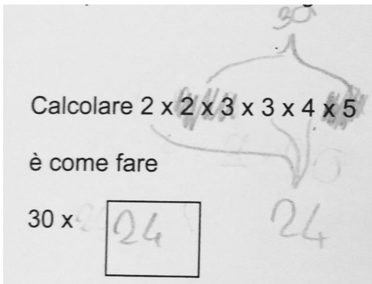
> «Capita spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, tende a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto, tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono accettabili per quei particolari sistemi. Si parla, in questo caso, di analogie "tacite" che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo».
>
> (pp. 255-256)

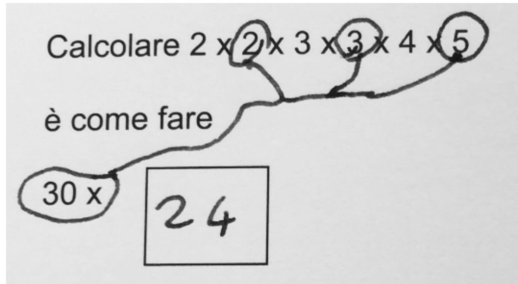
Nella pratica didattica sono molteplici gli esempi legati a questo aspetto, si pensi ad esempio al trattamento dei numeri razionali come se fossero "naturali con la virgola", all'idea di precedente e successivo, alle operazioni con le frazioni. È dunque consigliabile dal punto di vista didattico un uso consapevole dell'analogia, atto a non creare fraintendimenti nella mente dell'allievo.

L'analogia proposta in questo quesito potrebbe essere fuorviante per gli allievi e diventare fonte di ostacolo alla comprensione dell'esercizio. L'esempio mostra, infatti, la moltiplicazione 2 x 2 x 3 x 4 che diventa 4 x 12, applicando la proprietà associativa. Nell'esercizio da completare, invece, oltre a tale proprietà si richiede implicitamente anche l'utilizzo della proprietà commutativa, in quanto il numero 30 già presente non si può ottenere dalla moltiplicazione dei primi fattori, così come invece era possibile fare nell'esempio. Questa differenza potrebbe aver messo in difficoltà alcuni allievi che, ancorati all'esempio mostrato, potrebbero non essere stati in grado di comprendere la richiesta del quesito. Infatti, dall'esempio fornito potrebbero risultare vincolanti le seguenti due informazioni: i numeri devono essere considerati nell'ordine come sono scritti e devono essere considerati a due a due. Nello svolgimento dell'esercizio, in realtà, queste due informazioni che si potrebbero desumere implicitamente, non sono da considerare per ottenere la soluzione auspicata. L'allievo che segue questo ragionamento e sceglie di raggruppare i primi due numeri, 2 e 2, non ottenendo 30, dovrebbe ripensare alla strategia scelta e trovarne una nuova.

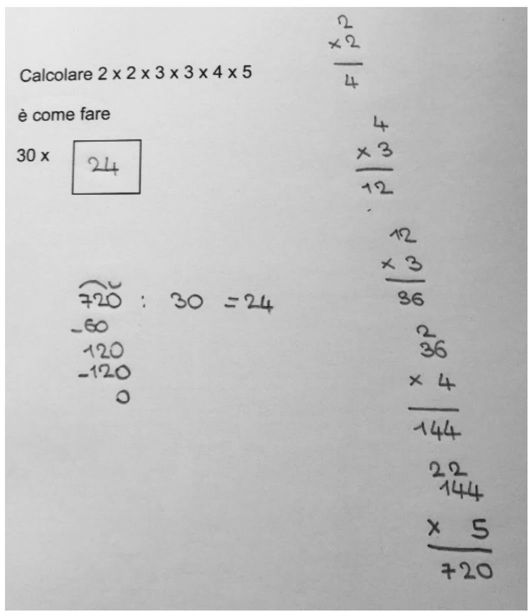
Un possibile modo di procedere è quello di individuare tra i fattori quelli che moltiplicati danno 30 (non necessariamente i primi due), raggrupparli e moltiplicare il resto dei numeri presenti. Formalmente l'allievo dunque dovrebbe applicare la proprietà commutativa ordinando i fattori in modo da avere inizialmente tutti quelli che moltiplicati tra loro danno 30 e poi applicare la proprietà associativa ricavando di conseguenza quelli che moltiplicati tra loro danno 24. L'1,8%

opera in questo modo. I seguenti protocolli mostrano il ragionamento adottato da questi allievi.

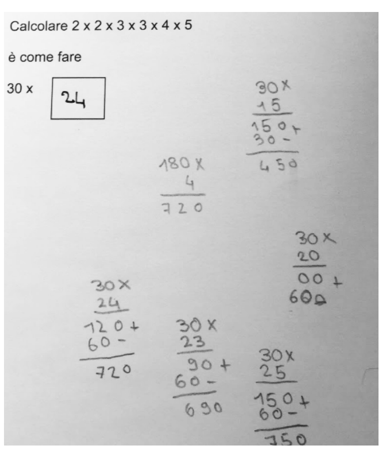


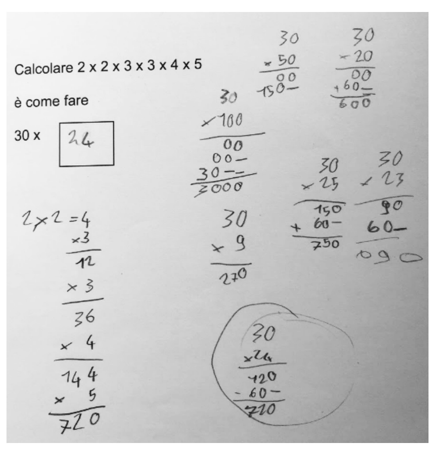


Un altro possibile modo di operare è quello di moltiplicare tutti i numeri presenti, ottenendo così 720, e poi dividere questo numero per 30.
Il risultato che si ottiene procedendo in questo modo è quello corretto, ma concettualmente non si è seguita la procedura suggerita dall'esempio. Il 2,7% degli allievi predilige questo procedimento considerato corretto, come evidenziato dal seguente protocollo.

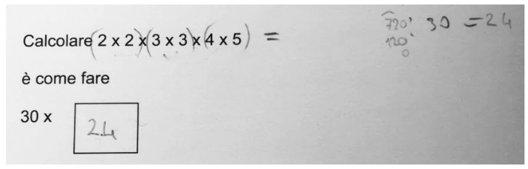


Lo 0,7% degli allievi procede in modo analogo a quello precedente, ma senza effettuare una divisione, bensì effettuando dei tentativi fino a trovare il numero che, moltiplicato per 30, permette di trovare 720, come emerge dai seguenti protocolli.

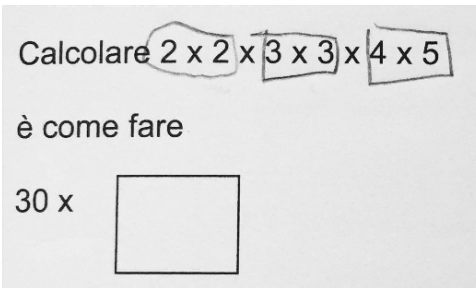


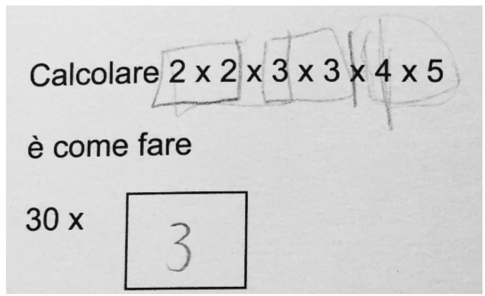


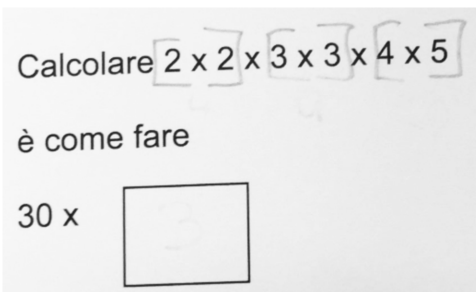
Il protocollo a fianco evidenzia il tentativo dell'allievo di lavorare in modo analogo all'esempio proposto, ma trovandosi in difficoltà ripiega su un approccio diverso arrivando alla soluzione corretta.

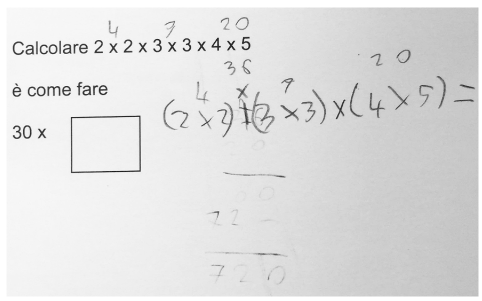


Di seguito si riportano alcuni protocolli di allievi che hanno utilizzato l'esempio in modo scorretto, ma come già discusso, prevedibile: essi procedono raggruppando le coppie secondo l'ordine nel quale si presentano, ricercando quindi la maggiore analogia possibile con l'esempio proposto. L'1,8% fornisce la risposta 3, come mostrato dal secondo e terzo protocollo dei seguenti riportati (il terzo cancellato ma ancora visibile). Questo valore potrebbe indicare il numero di coppie formate con i numeri presenti.

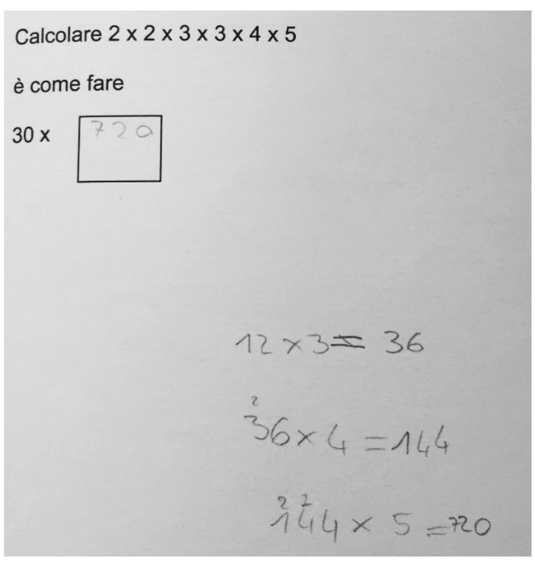




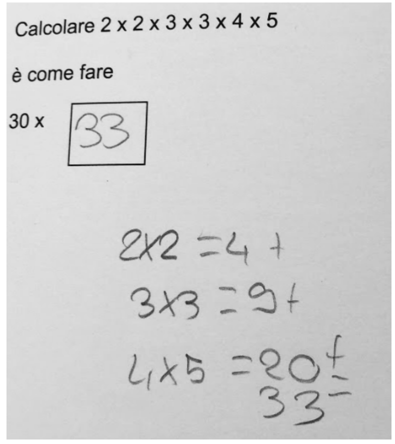




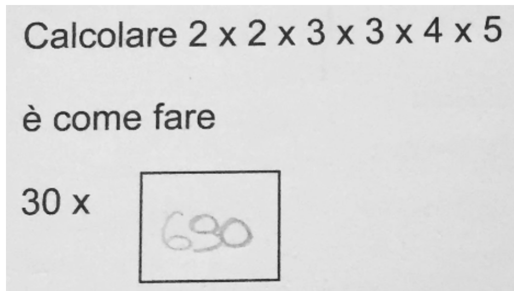
Il 3,0% indica come soluzione il prodotto 720, dimostrando di non aver capito la consegna, ma fermandosi a considerare solo la prima parte del quesito "Calcolare 2 x 2 x 3 x 3 x 4 x 5", come si evince dal seguente protocollo.

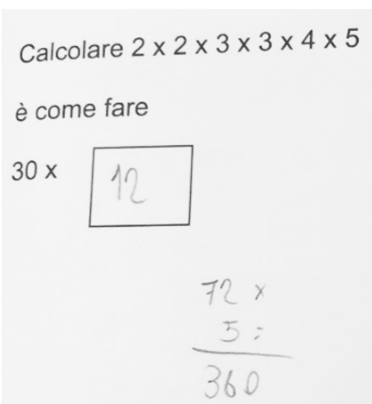


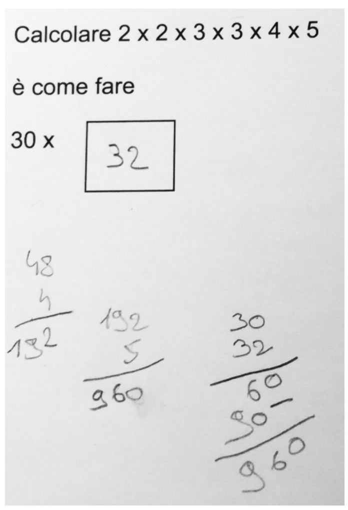
Il 2,6% risponde 33. Il protocollo a fianco può fornire una spiegazione di come gli allievi possono essere arrivati a questo numero. Anche in questo caso risulta preponderante la convinzione suggerita dall'esempio di considerare le coppie dei numeri presenti in ordine. L'allievo, in questo caso, non si preoccupa della presenza e del significato del numero 30, ma raggruppa i fattori a due a due e ne calcola la somma invece del prodotto, come hanno invece fatto coloro che hanno risposto 720.

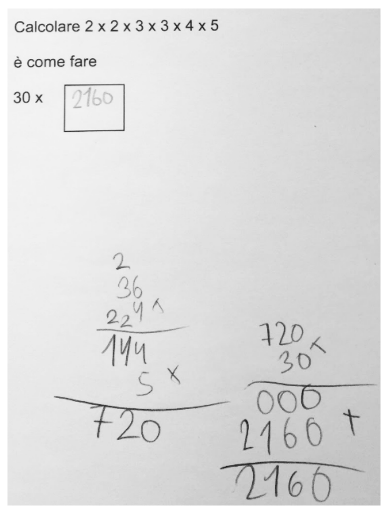


Nella categoria "Altro" sono comprese risposte di vario tipo dettate da svariati procedimenti: vi sono allievi che rispondono 690, confondendo il segno di moltiplicazione dopo il 30 con il segno di addizione, come mostra il protocollo a fianco; ve ne sono altri che hanno compreso il senso della consegna, ma commettono errori di calcolo come nei primi due protocolli seguenti o allievi che moltiplicano il risultato ottenuto per 30, come riportato nel terzo protocollo.









3.4.8) Un appartamento aveva 7 locali. Dal locale più grande sono state ricavate 2 camere. Quanti locali ha ora l'appartamento?

Risposta: ....

Risposta corretta: 8
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
35,4%	52,8%	11,8%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare procedimenti o rappresentazioni	32,0%
L'allievo propone una risposta corretta mostrando il procedimento o la rappresentazione grafica che l'ha portato alla soluzione	3,4%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica 9 come soluzione, esplicitando l'addizione 7 + 2	24,4%
L'allievo indica 5 come soluzione, esplicitando la sottrazione 7 - 2	17,1%
L'allievo indica 6 come soluzione	6,2%
L'allievo indica 7 come soluzione	2,4%
Altro	2,7%

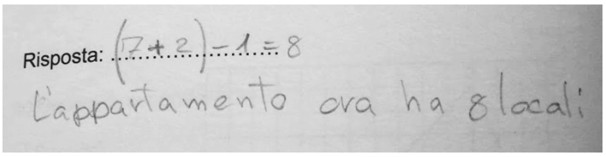
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

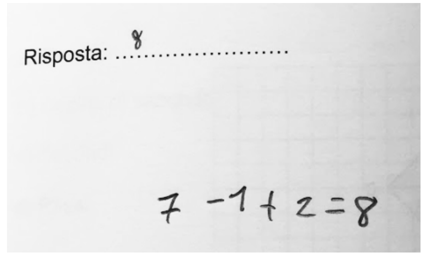
Il quesito è il ventisettesimo del primo fascicolo. Si tratta di un item che verte su un problema contestualizzato, il cui testo descrive un appartamento inizialmente composto da 7 locali a cui è stata apportata una modifica: il locale più grande è stato diviso in due ulteriori camere allo scopo di aggiungere un nuovo locale all'appartamento, portando così il numero di camere dell'appartamento da 7 a 8.

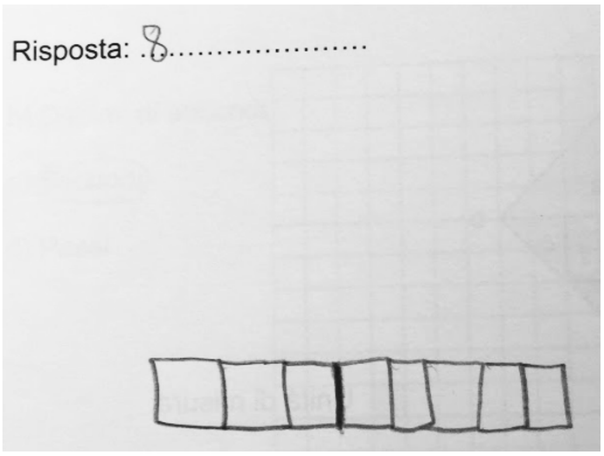
Trattandosi di un quesito presentato attraverso un testo scritto in forma verbale, è necessaria una decodifica delle informazioni del testo per una comprensione della situazione.

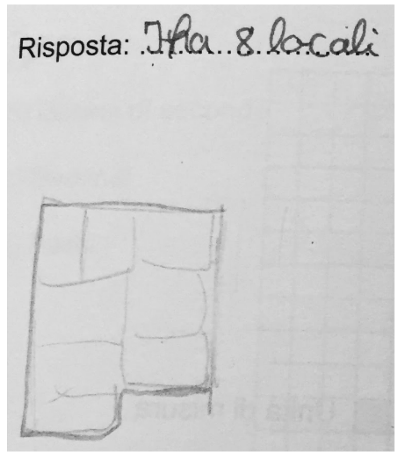
La percentuale di risposte errate di questo quesito supera il 50%. Si tratta dell'item a risposta aperta che ha collezionato il più alto numero di fallimenti. Inoltre, va rilevato che la percentuale di risposte mancanti è bassa rispetto al numero di risposte non corrette e paragonata a quelle di altri quesiti dei fascicoli. Questo potrebbe indicare che l'item non è stato percepito dagli allievi come particolarmente difficile.
Nel caso delle risposte corrette, solo in pochi protocolli è stato possibile rilevare, oltre al risultato, anche il processo risolutivo adottato per fornire la risposta (3,4%). Il 32,0% ha fornito invece la risposta corretta senza esplicitare il procedimento.

Di seguito sono riportati alcuni esempi di risposta, dove sono mostrati approcci risolutivi diversi: i primi due scelgono un modello di tipo aritmetico, gli ultimi due, un modello figurale.

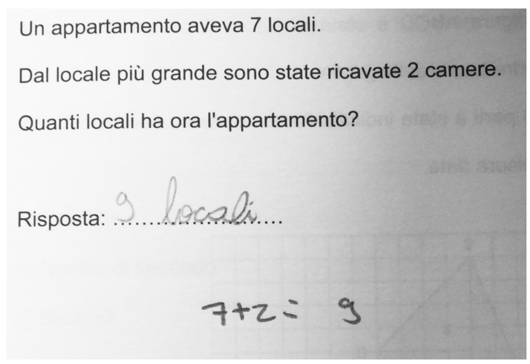








Tra le risposte sbagliate, la più frequente è 9 (24,4%). Nel protocollo a fianco, un esempio di risposta. Tale valore è stato individuato attraverso l'operazione 7 + 2. Questa scelta potrebbe suggerire che lo studente abbia interpretato la situazione rappresentata dal testo del quesito come l'aggiunta di due locali ai 7 già esistenti.


Un appartamento aveva 7 locali.

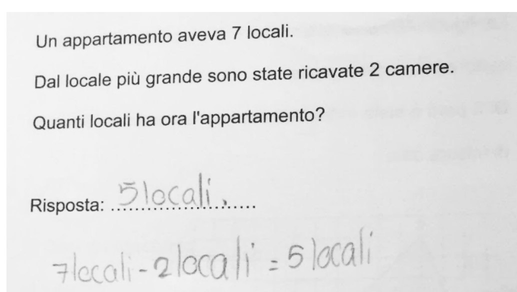
Dal locale più grande sono state ricavate 2 camere.

Quanti locali ha ora l'appartamento?

Risposta: 9 locali

7+2= 9

Invece, chi ha fornito la risposta 5 (17,1%) potrebbe aver interpretato la situazione come se fossero stati eliminati due locali dall'appartamento, portando a 7 - 2 = 5 il numero di locali rimasti.


Un appartamento aveva 7 locali.

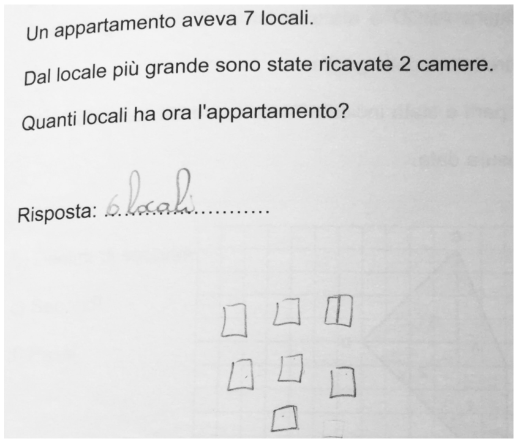
Dal locale più grande sono state ricavate 2 camere.

Quanti locali ha ora l'appartamento?

Risposta: 5 locali

7 locali - 2 locali = 5 locali

Nel protocollo della pagina seguente, invece, l'allievo risponde 6 (5,5%), servendosi di una rappresentazione iconografica per modellizzare la situazione; tale modello è coerente con il testo presentato, ma non lo è la risposta fornita.



Sulla base delle risposte date a questo quesito, sono state formulate alcune ipotesi interpretative relative alle risposte errate, legate prevalentemente ad aspetti linguistici del testo (vedi paragrafo 2.3.). In particolare, esse sono connesse al processo di *formulazione*, che richiede la capacità di estrapolare dal testo scritto le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema (Franchini, Lemmo, & Sbaragli, 2017).

Nel quesito vi sono, infatti, alcuni aspetti linguistici che potrebbero avere avuto degli effetti sulle scelte risolutive. In particolare, va osservato che, per evitare ripetizioni all'interno del testo, gli autori dell'item hanno scelto di fare uso di due termini, *locali* e *camere*, che devono essere interpretati dal solutore come sinonimi. In effetti, nel vocabolario dei sinonimi e contrari della lingua italiana, alla voce *locale* si legge:

> ***Locale*** *s. m. [dal fr. local, uso sost. Dell'agg. local "locale"]. - 1. a. [ambiente o complesso di ambienti di costruzioni edilizie: la casa ha quattro l.] ≈ camera, stanza, vano.* (Treccani, 2003, voce locale).

Allo stesso modo, il termine *camera* viene definito:

> ***Càmera*** *s. f. [lat. camĕra, camăra «volta, soffitto a volta di una stanza», dal gr. καμάρα]. – 1. a. In senso generico, qualunque ambiente interno di un edificio per abitazione, che non abbia, per particolarità di forma, dimensioni e impianti, una destinazione speciale. Più concretam., ciascuno dei locali che compongono un appartamento: c. da letto, c. da pranzo, c. da soggiorno; un appartamento di tre c. e cucina.* (Treccani, 2003, voce camera).

È possibile notare che nella definizione di *locale* si fa uso del termine *camera* indicato proprio come sinonimo e viceversa.
In realtà, andando a cercare la definizione della parola *locale* in un dizionario della lingua italiana si può notare come con tale termine si possa fare riferimento ad un ambiente o a un complesso di ambienti più generico rispetto alla parola camera, infatti:

> ***Locale*** *s. m. [dal fr. local, uso sostantivato dell'agg. local «locale1»]. – Ambiente o complesso di ambienti, anche in costruzioni non edilizie (come, per es., nelle navi), che per forma, disposizione, attrezzatura, e sim., è destinato a determinati usi: paese in cui scarseggiano l. scolastici; cercare un l. adatto per una conferenza, per una riunione; il l. è troppo ristretto per essere adibito a sala cinematografica; nelle navi, l. macchine, l. caldaie, ecc. Più genericam., stanza, ambiente, soprattutto di edifici pubblici o per collettività: caserma, collegio con l. ampî, ariosi, ecc.* (Treccani, 2003, voce locale).

Si tratta di una distinzione molto sottile che però potrebbe portare a interpretazioni del testo differenti rispetto agli intenti dall'autore: il locale è un ambiente in cui possono esservi più camere. In riferimento a questa interpretazione, la situazione presentata nell'item potrebbe essere intesa come una circostanza in cui il numero di camere dell'appartamento varia, in particolare aumenta, ma quello di locali rimane invariato.

Altri studenti potrebbero invece aver interpretato la situazione come la trasformazione di un locale in due camere. In questo modo, il locale più grande non rientra più nel conteggio e per questo i locali calano a 6.

Un ulteriore termine che potrebbe non appartenere al dizionario degli studenti è il verbo *ricavare*. Negli intenti dell'autore, tale termine è presentato con il significato di *ottenere*. In effetti, sempre in un vocabolario della lingua italiana, il termine viene definito come:

> ***Ricavare*** *v. tr. [comp. di ri- e cavare]. 2. Cavare fuori, ottenere, trarre o estrarre, di solito attraverso una elaborazione o trasformazione più o meno profonda: r. una scala nella roccia; il gruppo statuario è ricavato da un unico blocco di marmo; acquavite ricavata dalla distillazione delle vinacce; un sottosuolo ricchissimo da cui si ricavano ferro e carbone.* (Treccani, 2003, voce ricavare).

Se tale termine non appartiene al dizionario degli allievi coinvolti nella risoluzione del quesito, è possibile che essi reagiscano non rispondendo alla domanda oppure che interpretino il significato del verbo in modo personale.

Analizzando i processi risolutivi degli allievi, è possibile che il termine *ricavare* possa essere stato interpretato come: aggiungere, togliere, unire. Coerentemente con ognuna di queste interpretazioni, lo studente potrebbe aver fornito una risposta differente da quella corretta. Ad esempio, lo studente che interpreta il verbo come sinonimo di *aggiungere*, potrebbe fornire come risposta 9, facendo, $7 + 2 = 9$; oppure, colui che al termine ricavare associa il significato di *togliere*, potrebbe indicare come risposta 5 camere e dunque svolgere il calcolo: $7 – 2 = 5$. Infine, lo studente che interpreta l'azione di ricavare come sinonimo di *unire*, potrebbe fornire come risposta 6, poiché due locali sono diventati uno solo e quindi $7 – 1 = 6$.

Inoltre, nella consegna del quesito si fa implicito riferimento a dei lavori edili attuati in un appartamento, contesto che potrebbe non rientrare nei fatti del mondo legati al vissuto degli allievi.

Seconda somministrazione.
Il quesito è stato somministrato anche agli allievi di prima media. Il confronto tra i risultati ottenuti mette in evidenza una leggera differenza nelle percentuali di risposte corrette ed errate rispetto a quelle raccolte nell'indagine con allievi di quinta elementare.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	Percentuali seconda somministrazione (I SM)
Risposte corrette	35,4%	29,9%
Risposte errate	52,8%	55,2%
Risposte mancanti senza motivazione	9,8%	9,8%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	5,1%

Anche nel secondo caso possiamo notare che la percentuale degli studenti che hanno risposto in maniera corretta rimane intorno al 30%, di poco inferiore rispetto a quella precedente, e la percentuale di risposte errate è intorno al 55%. Come si può vedere dai dati raccolti, circa il 5% esplicita di non aver risposto a causa di una mancata comprensione del testo del quesito.

Anche le risposte errate fornite in questa somministrazione possono essere identificate attraverso le stesse categorie osservate nell'indagine precedente.

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo indica 9 come soluzione, esplicitando l'addizione 7+2	24,4%	20,7%	9
L'allievo indica 5 come soluzione, esplicitando la sottrazione 7-2	17,1%	16,1%	8
L'allievo indica 6 come soluzione	6,2%	9,2%	7
L'allievo indica 7 come soluzione	2,4%	4,0%	3
Altro	2,7%	5,2%	5

Confrontando le percentuali relative alle diverse tipologie di risposte scorrette, possiamo osservare che in generale i risultati raccolti dalla seconda somministrazione non si distanziano molto da quelli raccolti nella prima. Di seguito si riportano alcuni stralci di interviste effettuate agli allievi di prima media.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
5	I.: "Cosa si fa in questo appartamento?" A.: "Si ricavano altre due camere." I.: "Praticamente cosa si fa?" A.: (dopo qualche secondo di silenzio) "Non lo so." I.: "È il testo che non è chiaro?" A.: "Sì." I.: "Tu riesci ad immaginarti cosa devono fare degli operai che entrano in questo appartamento?" A.: "Devono demolire."

5	I.: "Ti ricordi la domanda dei locali? Mi fai vedere come hai fatto per rispondere?" A.: "Ho fatto 7 - 2." I.: "Hai fatto 7 - 2, ma cosa ti chiede questa domanda? Riesci a raccontarmela?" A.: "Mmm, dal locale più grande sono stati ricavati, sono stati tolti, mi sa, due camere." I.: "Quindi ricavati per te significa tolti?" A.: "Sì."
5	I.: "Come ti sembrava questo qua?" (indica l'item). A.: "Non l'avevo capita bene. Allora sono 7 locali, dal locale più grande sono state ricavate due camere." I.: "Che vuol dire?" A.: "Vuol dire che un locale ha due camere gli altri 1." I.: "Quindi da un locale si ricavano due camere, cosa vuol dire?" A.: "Eh, non lo so bene, dal locale più grande sono state ricavate due camere quindi si può andare a dormire in 2 e nelle altre in 1." I.: "Ma letti o camere?" A.: "Ah, ma camere nel senso stanze?" I.: "Sì." A.: "Ah, adesso capisco! Il locale lo dividono in stanze." I.: "Lo dividono in quante stanze?" A.: "Due, tipo fanno una parete in mezzo."

Gli studenti intervistati che hanno risposto 5 motivano le proprie scelte in vari modi che possono essere distinti nelle due seguenti categorie:

– alcuni esplicitano di attribuire al termine *ricavare* il significato di *demolire/togliere*;
– altri manifestano varie difficoltà di comprensione del testo del quesito, dichiarando di non riuscire a interpretare la situazione, senza esplicitare per il termine *ricavare* un significato alternativo.

Si rilevano quindi difficoltà nella matematizzazione orizzontale, ossia nel passaggio dalla situazione reale al modello matematico che la interpreta. In alcuni casi, la scelta dell'operazione matematica da applicare sembra totalmente sganciata dalla situazione descritta, ossia dall'azione svolta sulle camere dell'appartamento.

Di seguito riportiamo due stralci di interviste ad allievi che hanno fornito 9 come risposta.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
9	I.: "Mi fai vedere come hai fatto a rispondere?" A.: "Ricavate? Eh, non mi ricordavo bene cosa significa ricavate." I.: "Secondo te cosa significa? Proviamo a rileggere." L'allievo legge ad alta voce. I.: "Allora, tu hai risposto 9, mi spieghi come hai fatto a dire 9?" A.: "Forse ho fatto una cavolata ma ho pensato, aggiungendo due camere. Quindi si aggiungeva nell'appartamento." I.: "Quindi tu hai fatto?" A.: "Più 2!"
9	A.: "Il locale lo dividono in stanze." I.: "Lo dividono in quante stanze?" A.: "Due, tipo fanno una parete in mezzo." A.: "Prima ne aveva 7 e adesso ne ha 9!" I.: "Ne ha 9?" A.: "Perché se ne ha 7 e ne aggiungi 2." I.: "Quindi crei due stanze." A.: "No, parti da qualcosa che già avevi." I.: "Prima cosa avevi?" A.: "Una stanza." I.: "E adesso?" A.: "2." I.: "Quindi quante stanze avevi?" A.: "Ah, 8!"

Molti di coloro che rispondono 9 locali, esplicitano l'operazione effettuata: 7 + 2 = 9. Anche in questo caso, dalle interviste emergono due motivazioni differenti:

– attribuiscono al termine *ricavare* il significato di *aggiungere;*
– manifestano una difficoltà nella creazione di un modello matematico che permette di strutturare la realtà.

Come nel caso precedente emerge una difficoltà linguistica legata al significato del termine *ricavare*, interpretato in modo differente al caso precedente, e una legata alla modellizzazione della situazione. In quest'ultimo caso gli allievi mostrano di aver compreso il tipo di intervento edilizio fatto sull'appartamento, ma rispondono velocemente cercando un'operazione adatta a modellizzare tale intervento in riferimento ai dati numerici presentati, senza interpretare nella realtà se una camera era già conteggiata.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
6	I.: "Guardiamo questo qui; tu dici ne ha 6, come hai fatto a trovare questa risposta?" A.: "Allora, un appartamento ha 7 locali nel senso…" I.: "Cosa significa locali secondo te?" A.: "Come dire camere." I.: "Ah, ok, quindi sono la stessa cosa?" A.: "Sì, e poi, ehm, dal locale più grande sono state ricavate due camere quindi da sette locali ho unito due camere." I.: "Quindi ricavare cosa significa?" A.: "Unire, due diventano una!"
6	I.: "Come hai fatto a rispondere a questa domanda?" A.: "Qui diceva 7 locali e ho pensato visto che ne han tolto uno anche se era grande l'hanno tolto." I.: "Ah, che l'hanno tolto, dov'è che dice questa cosa?" A.: "Lo dice nella seconda, dal locale e non dai locali, sono state ricavate due camere." I: "Cosa vuol dire sono state ricavate due camere?" A: "Che un locale è stato diviso per fare due camere; quindi ne hanno tolto uno che sono diventate due camere e quindi rimangono 6 locali."

Nel caso degli allievi che rispondono 6, si evidenziano due diverse difficoltà legate entrambe alla conoscenza del dizionario:

– interpretano il termine *ricavare* come *unire*, e dunque due dei 7 locali diventano uno unico e per questo il numero totale dei locali cala a 6;
– non riconoscono lo stesso significato ai termini *camere* e *locali*, interpretando lo stimolo come se uno dei 7 locali venisse trasformato in due camere. In questo modo, dopo la modifica all'appartamento rimangono 6 locali e 2 camere.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
7	I.: "Questo te lo ricordi?" A.: "Sì, l'ho fatto a mente." I.: "Ok, ora fammi vedere come hai fatto a trovare quella risposta lì." A.: (Legge ad alta voce il testo) "Eh, ne ha comunque sette." I.: "Fammi vedere come hai fatto, puoi scrivere, dirlo a parole." A.: "Dal locale più grande sono state ricavate due camere, ma le camere vanno come per l'appartamento?" I.: "Quindi? C'è una questione di locali, camere e appartamenti." A.: "Io ho scritto 7 perché non capivo se i locali e le camere erano uguali. Cioè è come se il locale grande è stato diviso in due?" I.: "Sì, giusto!" A.: "Ah! io pensavo soltanto che fossero state ricavate due camere assieme." I.: "Secondo te con locali e camere si intende la stessa cosa o no?" A.: "Queste due dipende se si intende come camera da letto o locale o camera in senso grande da cui si ricava un locale cioè si mette la camera, la cucina e il bagno." I.: "Quindi locale e camera è la stessa cosa o no secondo te?" A.: "Forse qui è la stessa cosa ma pensavo di no."
7	I.: "Come mai qua hai risposto 7 locali?" A.: "Perché se ci sono 7 locali e dal più grande ne ricavo 2, rimane sempre lo stesso." I.: "Ma che cos'è un locale?" A.: "Una stanza." I.: "E la camera?" A.: "È anche un locale." I.: "Quindi camere e locali sono la stessa cosa?" A.: "No, il locale è un appartamento."

Dalle interviste emerge che tutti gli studenti che rispondono 7 non considerano come sinonimi i termini *camere* e *locali*. In questo caso, quindi, si riscontra un'unica difficoltà di interpretazione linguistica, viene considerato che il numero di locali rimane invariato e il numero di camere cambia.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
14	I.: "Spiegami questo qua dell'appartamento." A.: "Ho calcolato che ci sono due camere e ogni camera ha 7 locali allora ho fatto 7+7 che fa 14."
14	I.: "Raccontami qual è la situazione, cosa ti chiedevano." A.: "Che un appartamento ha 7 locali". I.: "Cosa significa?" A.: "Che ha 7 cam…ere." I.: "Che ha 7 camere e poi?" A.: "Dal locale più grande sono state ricavate due camere." I.: "E questo cosa significa?" A.: (silenzio) "Che nel locale più grande hanno aggiunto due camere." I.: "Come mai hai risposto 14?" A.: "7×2." I.: "Come mai hai fatto 7×2?" A.: "Perché prima aveva 7 locali e poi dice che ne aveva ricavate altre due." I.: "Da tutti i locali?" A.: "Sì."

Come si può leggere dalle trascrizioni presentate, gli studenti hanno interpretato la situazione come se da ogni locale fossero state ricavate 2 camere. Questo aspetto mostra che essi non hanno prestato attenzione al fatto che si parlasse solo del locale più grande e dunque hanno interpretato il testo come se fosse: "un appartamento ha 7 locali; da ogni locale sono state ricavate due camere." Ciò evidenzia come spesso gli allievi leggano in modo superficiale il testo di un problema, senza dare importanza alle diverse parole, ma deducendo frettolosamente ciò che secondo loro il testo vuole veicolare.

Anche questo atteggiamento è legato al frequente fenomeno di *lettura selettiva del testo*, già citato nel commento di diversi quesiti; infatti questi studenti hanno letto frettolosamente il testo soffermandosi solo sulle informazioni presentate attraverso i dati numerici:
– l'appartamento ha 7 locali;
– un locale è stato trasformato in 2 camere;
considerando invece superficialmente le altre informazioni che sono state proposte attraverso il linguaggio verbale e non numerico: "dal locale più grande".

3.5. Problemi con relazioni tra più dati

3.5.1) Considera i dati relativi al consumo delle automobili rappresentate:

a)

2,5 litri
ogni 100 km

b)

3,5 litri
ogni 100 km

c)

5 litri
ogni 100 km

d)

7,5 litri
ogni 100 km

Quale automobile percorrà 500 km consumando 25 litri di benzina?

Risposta: ....

Risposta corretta: l'automobile c)
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
76,2%	13,6%	10,2%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta ma non esplicita procedimenti	68,9%
L'allievo propone una risposta corretta ragionando sulla quantità di litri di benzina consumati e sui km percorsi	7,3%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica l'automobile a)	9,8%
L'allievo indica l'automobile b)	0,8%
L'allievo indica l'automobile d)	2,8%
L'allievo indica l'automobile c) e d)	0,2%

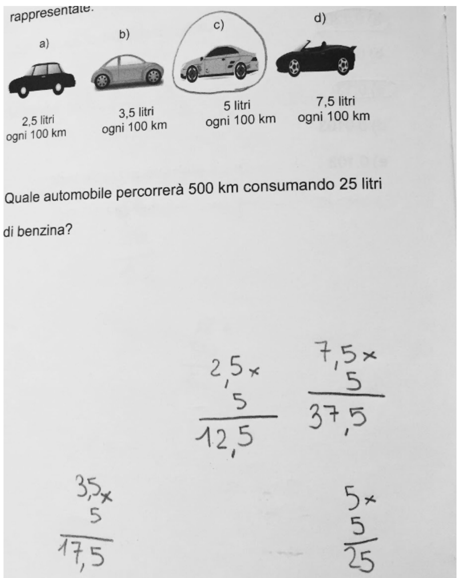
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Analizza relazioni tra grandezze diverse in gioco (in particolare: perimetri e aree di figure).

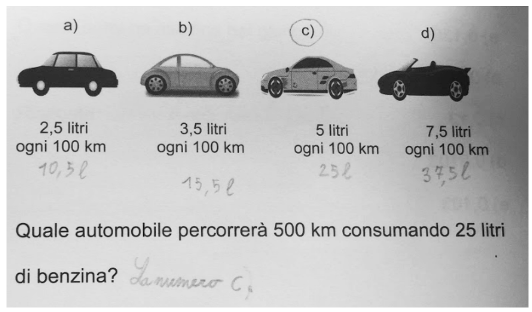
Il quesito è il quarto del secondo fascicolo e registra il 10,2% di risposte mancanti. La maggior parte di chi risponde, individua l'opzione c) corretta (76,2%). Questo quesito, tra tutti quelli del paragrafo, registra le performance migliori.

L'item è a risposta aperta univoca, ma la richiesta si focalizza sulla scelta di una delle quattro automobili mostrate. Per ognuna è indicato il consumo di benzina in litri per 100 km percorsi.

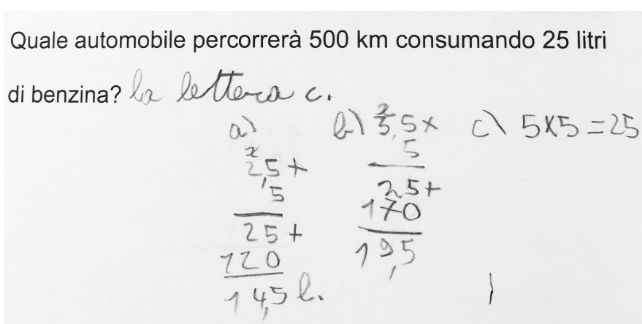
La percorrenza dunque è un dato fisso, mentre ciò che varia è il consumo di litri di benzina per ogni tipo di automobile.
La situazione, dunque, mette in relazione due grandezze: la capacità (unità di misura: l) e la lunghezza/distanza (unità di misura: km). Agli allievi è richiesto di individuare quale automobile soddisfa la relazione indicata nella domanda, ossia percorrere 500 km con 25 l di benzina. L'allievo deve essere in grado di cogliere la proporzionalità diretta che lega le due grandezze in questione: all'aumentare dei chilometri percorsi aumenta il numero di litri di benzina e osservare che il dato 500 km è 5 volte il dato fornito nello stimolo (100 km). L'allievo può scegliere differenti strategie per giungere a individuare la risposta corretta. È interessante osservare che per risolvere il quesito si deve ragionare su entrambe le grandezze e la relazione che le lega; operare solo sui litri o sui chilometri non condurrebbe ad alcuna considerazione utile.

Tra gli allievi che rispondono in modo corretto, il 68,9% non esplicita alcun procedimento, mentre il 7,3% riporta sul foglio informazioni sulle scelte effettuate. Alcuni moltiplicano per 5 i litri di benzina di ciascuna delle quattro automobili della situazione proposta e verificano in quale delle opzioni ritrovano il risultato 25 l, come mostrano i seguenti protocolli.

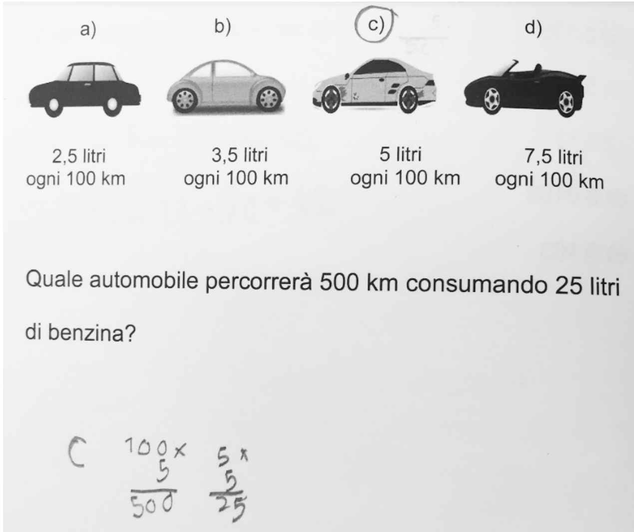




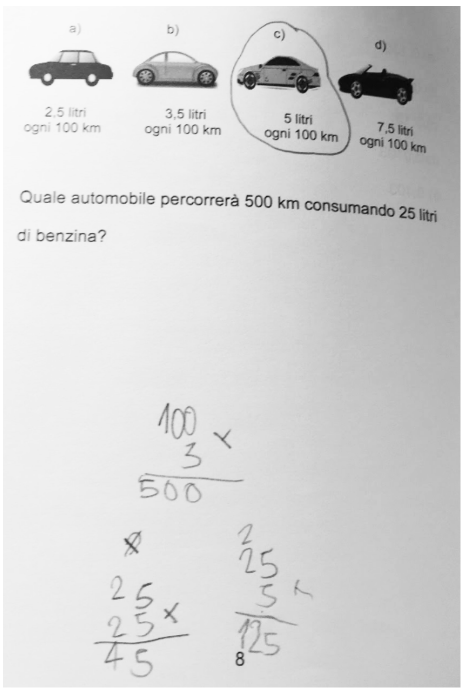
Altri allievi operano nello stesso modo fino a quando individuano quella che risponde alla richiesta del quesito, come nel seguente protocollo,



oppure stimano il risultato e individuano direttamente la risposta corretta come emerge dal protocollo riportato nella pagina seguente:

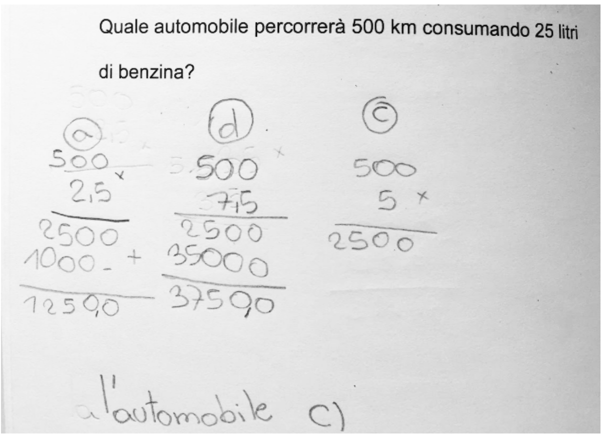


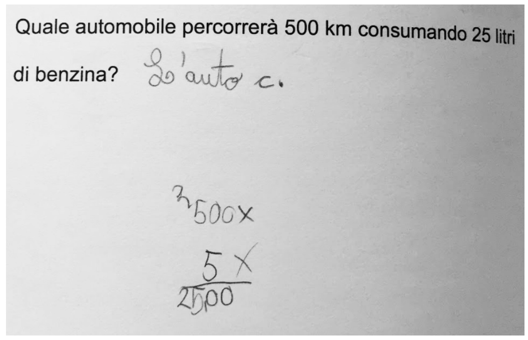
Tra le risposte corrette si trovano anche procedimenti insoliti che potrebbero nascondere alcune difficoltà. Nel seguente protocollo l'allievo cerchia correttamente l'automobile c), ma nelle operazioni svolte sulla parte bianca del foglio non è chiara la relazione individuata tra le grandezze.



Allo stesso modo nei seguenti due protocolli vi è indicata la risposta corretta, ma supportata da procedimenti che appaiono errati. Una possibile strategia risolutiva poteva essere quella di trovare il coefficiente di proporzionalità dell'automobile richiesta (500 km : 25 l = 20 km/l) e verificare quale delle quattro opzioni esprime lo stesso coefficiente di proporzionalità: a) 100 km : 2,5 l = 40 km/l; b) 100 km : 3,5 l = 28,6 km/l; c) 100 km : 5 l = 20 km/l; d) 100 km : 7,5 l = 13,3 km/l. Nel primo protocollo a sinistra, l'allievo sembra procedere in modo simile, ossia tenta di legare le grandezze in gioco, ma sbaglia relazione e numeri. Tuttavia la somiglianza tra i numeri ottenuti da questo procedimento (500 x 5 = 2500) e quelli richiesti (25 l) ha probabilmente fatto propendere verso la risposta c).

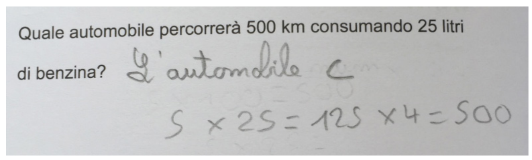
Un'altra possibile strategia per risolvere il quesito poteva essere quella di impostare una proporzione 100 : 5 = 500 : (n. litri) e trovare il numero di litri applicando le relative proprietà. In questo caso si sarebbe ottenuto: n. litri = (500 x 5) / 100. I due protocolli in questione ricordano anche questo possibile procedimento, ma è difficile pensare che un allievo di quinta elementare possa risolvere il quesito ragionando in questi termini.

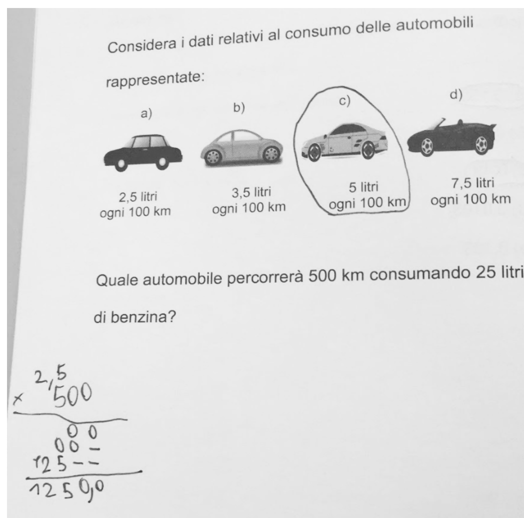




Altre risposte corrette, ma che esplicitano un procedimento errato, emergono nei protocolli a fianco. Queste considerazioni fanno riflettere su come spesso risultati o risposte corrette nascondano in realtà ragionamenti o procedimenti errati.

L'opzione scorretta più scelta è stata la a) (9,8%). Per questa categoria non abbiamo alcun protocollo con i calcoli esplicitati, quindi non riusciamo a dedurre nessuna ipotesi di errore commesso; osserviamo solamente che tra le quattro è quella con un numero di litri più facilmente riconducibile (essendo la metà) a quello richiesto. Il 2,8% sceglie l'opzione b), mentre le altre percentuali di scelta risultano poco significative.





3.5.2) La differenza tra due numeri è 0,95. Il più piccolo è 1,36. Calcola il numero più grande.

Risposta: ....

Risposta corretta: 2,31
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
62,0%	17,1%	20,9%

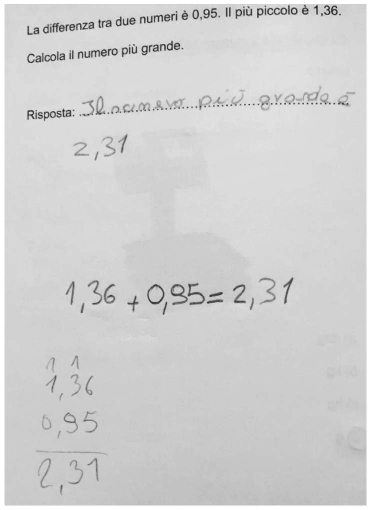
Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta ed esplicita il calcolo dell'addizione per trovarla	35,2%
L'allievo propone una risposta corretta ma non svolge alcun calcolo	26,8%

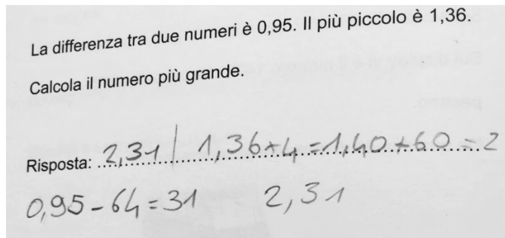
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica 1,36 come risposta	4,2%
L'allievo somma i due numeri del testo ma effettua errori di calcolo	3,7%
L'allievo sottrae i due numeri del testo	3,6%
Altro	5,6%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

Il quesito è il diciottesimo del primo fascicolo e richiede di calcolare il minuendo di una sottrazione. Il testo, seppur conciso, contiene al suo interno diverse informazioni che devono essere interpretate. Inoltre, il testo è ricco di "parole chiave" che possono indurre verso una data procedura ("differenza", "il più piccolo", "il più grande") nel caso di lettura selettiva. Un possibile procedimento risolutivo consiste nell'individuare la somma dell'addizione dei due addendi: 1,36 e 0,95.

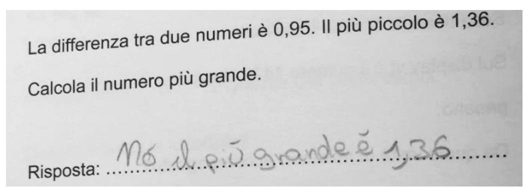
Il 62,0% degli allievi risponde in modo corretto, esplicitando per circa metà dei casi i calcoli eseguiti o il ragionamento condotto. Come esempio si riporta il seguente protocollo.

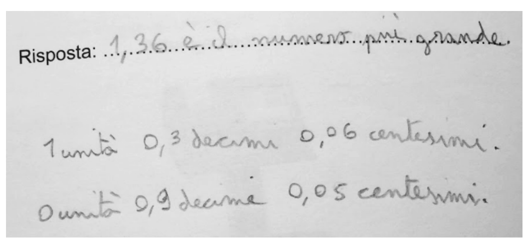




Il protocollo a fianco risulta particolarmente interessante, in quanto testimonia la corretta scelta del modello risolutivo, che viene tuttavia gestito in modo singolare ed errato dal punto di vista algoritmico. In particolare emerge l'intenzione dell'allievo di operare per completamento a partire da 1,36, commettendo tuttavia diversi errori di scrittura dei numeri decimali. Scrivendo 1,36 + 4 = 1,40 dimostra di trovare il risultato cercato con una scrittura però scorretta; avrebbe infatti dovuto scrivere 1,36 + 0,04 = 1,40. Allo stesso modo scrive le operazioni successive: 1,40 + 60 = 2 e 0,95 − 64 = 31. Questi errori possono celare un'incomprensione del valore posizionale dei numeri decimali. Un altro aspetto che emerge, già sottolineato altre varie volte in precedenza, è il ruolo del simbolo "=" come relazione di due termini, che in questo caso viene completamente trascurato a favore del significato "direzionale": 1,36 + 4 = 1,40 + 60 = 2. Oltre all'errore di scrittura dei numeri decimali, tale sequenza risulta quindi anche matematicamente scorretta perché non è vero che il primo membro è uguale al terzo.

Dai protocolli emergono tre tipologie principali di errori. Il 4,2% riporta come risposta 1,36, ossia restituisce il numero più grande tra quelli indicati nel testo. In questo caso l'allievo si è focalizzato solamente sull'ultima parte della consegna "Calcola il numero più grande", tralasciando le altre informazioni fornite dal testo.

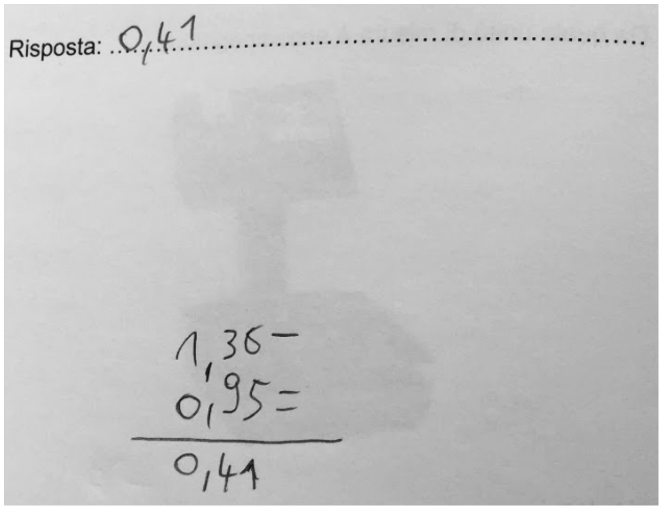




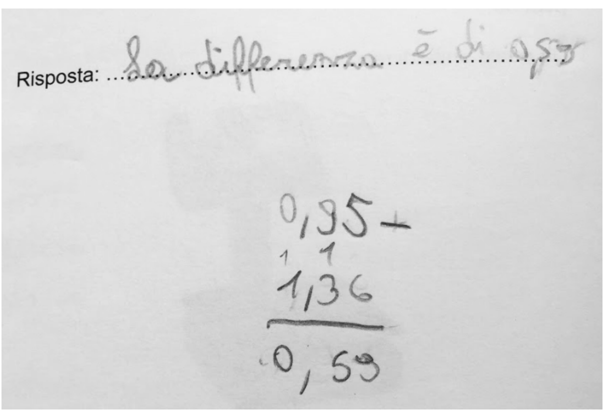
I protocolli a fianco mostrano risposte di questo tipo. Nel primo caso, l'allievo inizia la risposta con una negazione, probabilmente riferendosi alla frase del testo "Il più piccolo è 1,36". Essendo in disaccordo sul fatto che il numero più piccolo tra i due presenti nel testo fosse 1,36, risponde: "No il più grande è 1,36". Nel secondo protocollo l'allievo si sente di dover giustificare meglio la propria risposta, scomponendo i numeri del testo in unità, decimi, centesimi ma rilevando difficoltà sul sistema posizionale. L'allievo probabilmente ha unito in modo improprio le due rappresentazioni: 1,36 = 1 + 0,3 + 0,06 e 1,36 = 1 unità + 3 decimi + 6 centesimi.

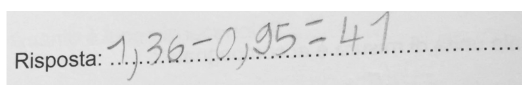
Il 3,6% del campione si lascia influenzare dalla parola "differenza" che riporta immediatamente all'operazione di sottrazione. Nonostante siano pochi gli studenti che commettono questo errore in tale quesito, in letteratura è un atteggiamento studiato e diffuso, come illustrato nel paragrafo 2.3.

Il seguente protocollo mostra come l'allievo abbia scelto l'operazione da eseguire e, di conseguenza, i numeri da utilizzare nell'ordine tradizionalmente più adeguato: dal numero più grande è stato sottratto il numero più piccolo. L'esecuzione in colonna in questo caso è corretta.



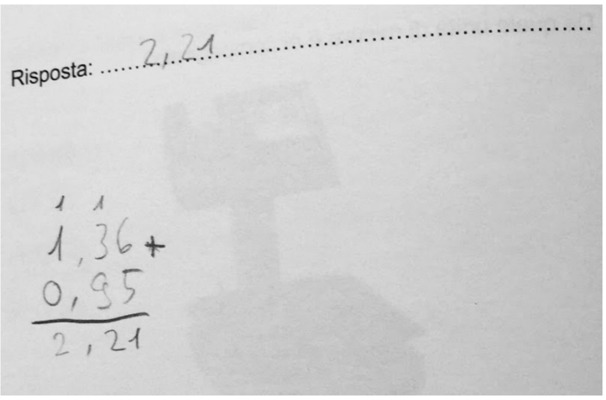
Tuttavia si riscontrano dei casi in cui l'allievo oltre a commettere errori nella modellizzazione del problema ne compie anche altri nell'esecuzione dell'algoritmo, come mostrano i protocolli seguenti (in quello di sinistra, l'allievo sottrae il numero più grande dal numero più piccolo presenti nel testo e sbaglia l'algoritmo della sottrazione; in quello di destra, l'allievo riporta il risultato della sottrazione trattando la parte decimale come se fosse un intero).

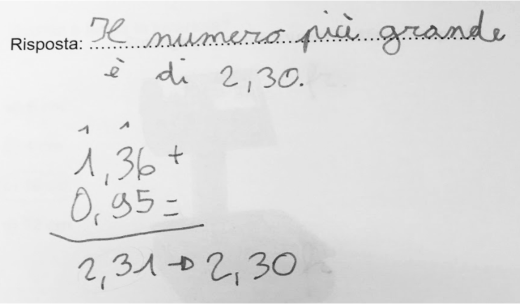




Come rileva la letteratura in didattica della matematica (Fandiño Pinilla, 2005a), sono diffuse misconcezioni negli allievi quando devono operare con numeri decimali, basate sul non aver ben compreso il valore posizionale delle cifre dopo la virgola. Ciò è particolarmente evidente quando si chiede di eseguire confronti e ordinamenti tra numeri decimali, che vengono gestiti confrontando le parti decimali come se fossero numeri interi: i decimali sono spesso concepiti come dei "naturali con la virgola", come ha dimostrato lo stesso Brousseau (1983). Oggi si sa che questa concezione è assai radicata e persiste talvolta fino all'università; essa costituisce un ostacolo didattico piuttosto diffuso alla comprensione dei numeri reali.

Il 3,7% individua l'operazione risolutiva corretta, ma commette errori durante l'esecuzione dell'algoritmo (protocollo a sinistra) o sceglie a sproposito di approssimare al decimo (protocollo a destra). Queste due tipologie di errori rientrano in due fasi diverse della matematizzazione: la prima è essenzialmente legata all'*utilizzare* la procedura individuata; la seconda presuppone un'*interpretazione* errata dei risultati matematici. L'allievo, infatti, suppone di dover arrotondare il risultato anche se il problema non lo richiede.





Seconda somministrazione.
Il quesito è stato somministrato agli allievi di prima media. Nella seguente tabella riportiamo i risultati ottenuti.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	62,0%	55,2%
Risposte errate	17,1%	12,6%
Risposte mancanti senza motivazione	20,9%	13,8%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	18,4%

Le performance nella seconda somministrazione sono peggiori rispetto alle prime, 7 punti percentuali in meno nelle risposte corrette e ben il 18,4% dichiara di non aver compreso il testo del problema. Possiamo dunque supporre che anche nella prima somministrazione una buona parte degli allievi che non ha risposto non ha compreso la consegna.
Confrontiamo di seguito gli errori più frequenti commessi.

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo indica 1,36 come risposta, confrontando dunque i due numeri del testo	4,2%	4,6%	2
L'allievo somma i due numeri del testo ma effettua errori di calcolo	3,7%	0,6%	1
L'allievo sottrae i due numeri del testo	3,6%	1,2%	-
Altro	5,6%	6,2%	4

I risultati sono confrontabili, ma c'è una piccola differenza nelle percentuali degli allievi che sommano i due numeri commettendo errori di calcolo e in coloro che invece li sottraggono.

Di seguito si riportano alcune interessanti interviste. Nella prima, l'allievo interpreta la richiesta del quesito "Calcola il numero più grande", immaginando di dover individuare il numero più grande tra i due presenti nel testo, per questo risponde 1,36, come avevano già risposto alcuni allievi di quinta elementare.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
Il più grande è 1,36	I.: "Cosa chiedeva la domanda?" A.: "Il più piccolo dice che è 1,36." I.: "Tu hai scritto che è il più grande." A.: "È il più grande perché se calcoli il numero più grande, questo (indica 1,36) è più grande di 0,95."

Le tre interviste seguenti evidenziano interpretazioni differenti del testo, derivanti da una mancata comprensione della situazione o di alcune parole presenti nello stimolo, in particolare del termine "differenza".

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
Non so farlo	A.: "Io questo non l'ho capito perché il numero più grande è questo (indica 1,36) e il più piccolo è questo (indica 0,95). Secondo me hanno sbagliato perché il più grande è questo (indica 1,36) e il più piccolo è questo (indica 0,95)!" I.: "Ok proviamo a vederlo insieme. Cosa non ti torna?" L'allievo rilegge il testo interpretandolo. A.: "Perché il più piccolo è 1,36 e il numero più grande è 0,95. Io non ho capito perché secondo me il più piccolo è 0,95 e il più grande è 1,36."

Non ho ben capito	I.: "Non hai capito bene la situazione?" A.: "Sì." I.: "Proviamo a ragionarci un attimo insieme. Cosa vuol dire la differenza tra due numeri? Fammi un esempio." A.: "La differenza ..." I.: "Prendi ad esempio due numeri e spiegami cos'è la differenza." A.: "Ah ok, che uno è più grande dell'altro." I.: "Fammi un esempio pratico." A.: "Prendo non so 200 e 650 e la differenza tra questi due numeri è che 650 è più grande e ha numeri diversi."
Non ho capito	I.: "Cosa significa secondo te la differenza?" A.: "Come sono disposti." I.: "Fammi un esempio." A.: "Ad esempio se c'è 25 e 52 sono diversi."

La prima intervista rivela una difficoltà a interpretare il testo nella sua complessità. L'allievo rimane turbato dall'accostamento della locuzione "il più piccolo" al numero 1,36, che di fatto, rispetto al numero 0,95 presente nel testo, è più grande. Questa sua incomprensione lo conduce a rispondere coerentemente "Non so farlo", non cadendo nelle tipiche maglie del contratto didattico che l'avrebbero potuto condurre a fornire comunque una risposta numerica, seppur in contraddizione con il suo pensiero. Come per l'intervista precedente, l'allievo ignora completamente la presenza della parola "differenza".
La seconda e terza intervista, invece, solleva una difficoltà che dall'analisi dei protocolli degli allievi di quinta elementare non era emersa in modo esplicito: la parola "differenza" viene intesa in senso comune come diversità, mancanza di somiglianza, e non in senso matematico; questo risulta d'ostacolo allo svolgimento del quesito.

Come già rilevato in precedenza, alcune difficoltà possono essere legate a carenze di interpretazione di aspetti linguistici del testo (analogamente a quanto visto nel quesito 3.4.8. per quanto concerne la parola "locali"). In questo caso a creare ambiguità è la parola polisemica "differenza", che assume significati diversi nel linguaggio comune e nell'ambito matematico.
Numerosi autori in ambito di didattica della matematica hanno messo in evidenza come tra le cause delle difficoltà di apprendimento di questa disciplina da parte degli studenti vi siano l'acquisizione del linguaggio "speciale" che essa richiede, spesso in contrasto con la lingua comune utilizzata fuori dal contesto scolastico (Bernardi, 2000; D'Amore, 1999; 2000; Ferrari, 2003; Laborde, 1995; Maier, 1993; 1995; Demartini, Fornara, & Sbaragli, 2017), e alcune difficoltà di comunicazione legate principalmente all'uso della lingua comune (D'Aprile, Squillace, Armentano, Cozza, D'Alessandro, Lazzaro, Rossi, Scarnati, Scarpino, Servi, & Sicilia, 2004; Ferrari, 2004). Il linguaggio della matematica, infatti, è influenzato dalla lingua comune più di quanto potrebbe apparire a prima vista, soprattutto sul piano lessicale. Questo a volte può risultare vincente dal punto di vista didattico, ma altre volte può costituire un ostacolo, in quanto gli alunni tendono ad applicare pratiche interpretative tipiche del linguaggio quotidiano al contesto della matematica, che ne richiederebbe altre. Accade quindi spesso quanto sintetizzato da Maier (1993, p. 4):

> «Si può parlare di miscuglio dei sensi per descrivere quello che sembra avvenire nella mente degli allievi che cercano di dare nuovi sensi a dei termini che, nella loro mente, possiedono di già il carattere di idee stabili dal loro uso nella comunicazione quotidiana.

Il senso "vecchio", che l'allievo ben conosce, disturba la comprensione del nuovo senso, e se l'allievo riesce ad integrare quest'ultimo, per molto tempo si pone il problema della distinzione tra il senso matematico e gli altri sensi».

Nella lingua comune la parola differenza significa:

differènza *s. f. [dal lat. differentia, der. di diffĕrens -entis: v. differente]. – L'esser differente; mancanza di identità, di somiglianza o di corrispondenza fra persone o cose che sono diverse tra loro per natura o per qualità e caratteri* (Treccani, 2003, voce differenza).

Nel linguaggio matematico, invece, indica il risultato di una specifica operazione, la sottrazione. Dunque, in questo caso, l'influenza che ha la lingua comune nella risoluzione di un problema gioca un ruolo negativo. Agli allievi è richiesto di imparare a utilizzare alcuni termini in senso più ristretto o diverso rispetto a quello al quale essi sono abituati nella comunicazione corrente. Come afferma D'Amore (2000), a volte si crea un vero e proprio dissidio tra il linguaggio matematico e la lingua comune:

«La lingua comune ed il linguaggio della Matematica entrano duramente in opposizione tra loro, in Didattica, costituendo un vero e proprio ostacolo sia alla comprensione sia ad un uso il più possibile "naturale" e spontaneo del linguaggio matematico atteso dall'insegnante».

(p. 36)

3.5.3) Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio; Sandro possiede un quarto delle biglie di Giorgio. Quante biglie ha Sandro?

Risposta: ....

Risposta corretta: 5
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
58,1%	27,9%	14,0%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica la risposta corretta senza esplicitare alcun procedimento	44,5%
L'allievo mostra calcoli e rappresentazioni per illustrare il procedimento usato	13,6%

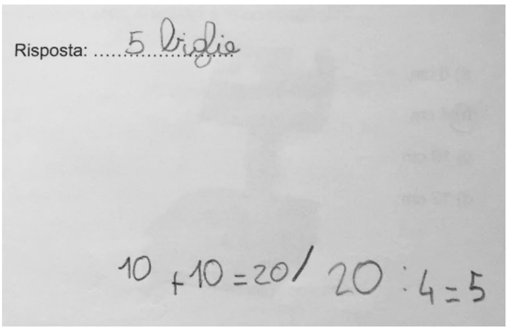
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica 1 come risultato	8,7%
L'allievo indica 2 o 2,5 come risultato	4,9%
L'allievo indica 15 come risultato	3,0%
L'allievo indica 4 come risultato	2,4%
Altro	8,9%

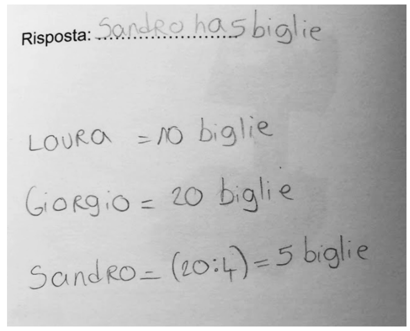
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

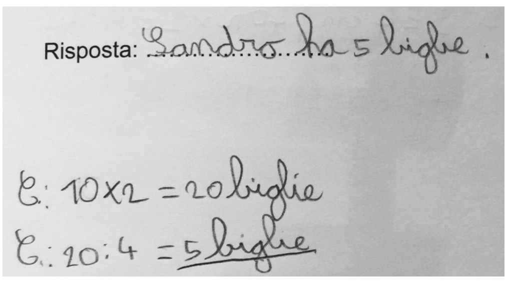
Il quesito è il quindicesimo del primo fascicolo e registra il 14,0% di risposte mancanti. L'item richiede la conoscenza dei concetti matematici "metà" e "un quarto" e la capacità di cogliere in modo corretto la relazione tra i vari numeri proposti. Per rispondere correttamente alla domanda e fornire il numero di biglie di Sandro è necessario individuare un passaggio intermedio, calcolando quelle di Giorgio. Ma per far ciò l'allievo deve comprendere e codificare in modo corretto la prima frase "Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio". L'allievo dovrebbe ragionare in questi termini: se Laura ha la metà delle biglie di Giorgio, allora Giorgio ne avrà il doppio, interpretando una situazione in cui la relazione è presentata in modo "inverso". Nella decodifica della frase e nel passaggio dal linguaggio verbale al mondo matematico, gli studenti devono riconoscere la relazione tra doppio e metà come inversa.

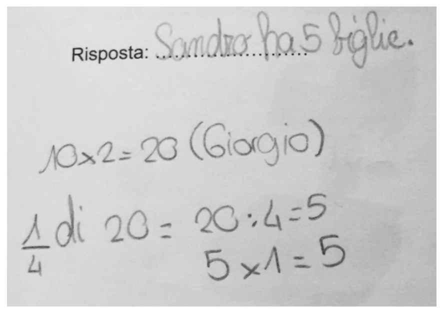
Alcuni bambini leggendo "metà" hanno semplicemente diviso per 2; come già evidenziato in precedenza è una strategia molto diffusa quella di ricercare parole chiave nel testo da correlare alla scelta delle operazioni, anziché considerare le relazioni numeriche che il testo, nel suo complesso, esprime. Più in generale, la difficoltà di comprendere le relazioni matematiche di un testo, soprattutto quelle che richiedono un "ragionamento inverso", si ripercuote anche a livelli successivi. Per questo vanno didatticamente favorite attività che permettano di lavorare sulle relazioni tra grandezze e numeri coinvolti.

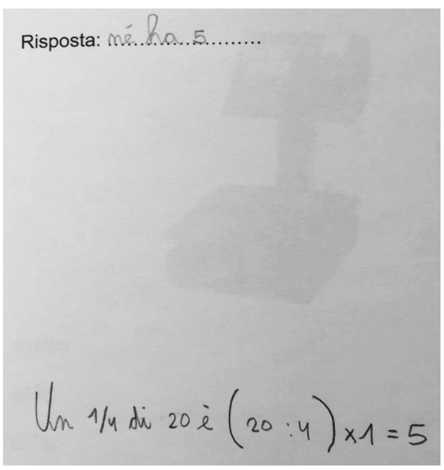
Il 58,1% risponde correttamente, in alcuni casi (13,6%) mostrando i calcoli e le rappresentazioni utilizzate per rispondere al quesito. I seguenti protocolli mostrano procedimenti numerici che evidenziano diversi modi di operare (calcolo in riga, calcolo in colonna, strategia additiva o moltiplicativa, esplicitazione della frazione ¼).

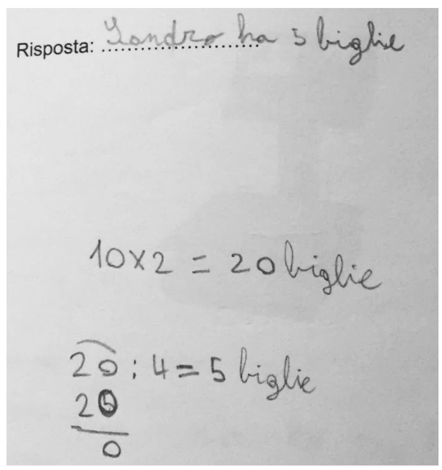




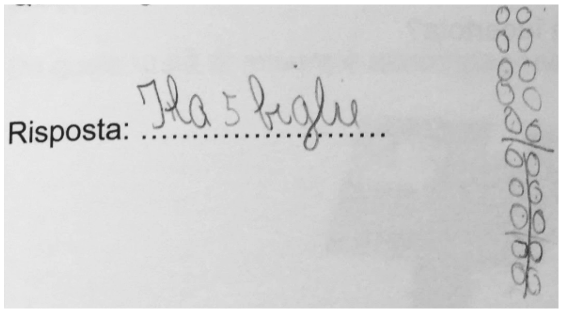


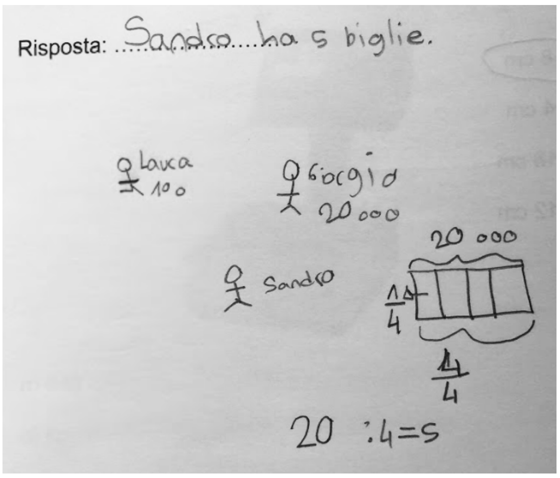


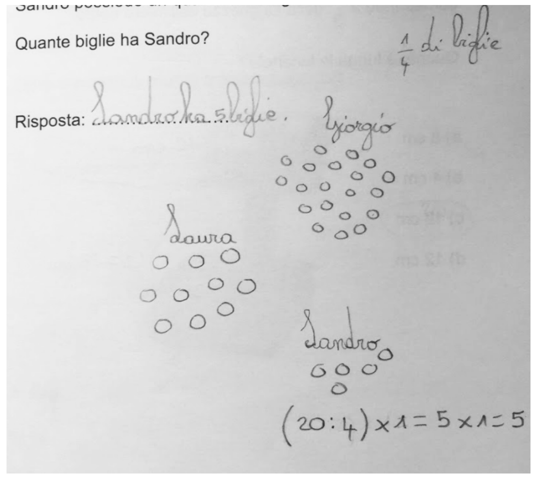




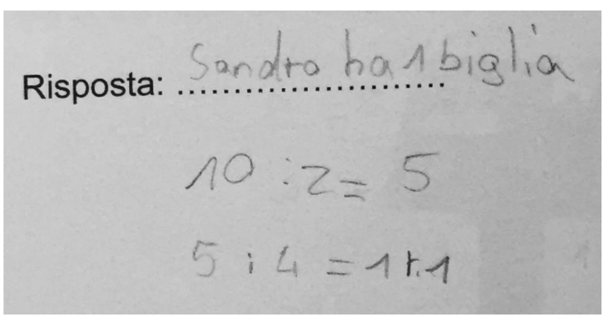
I protocolli della pagina seguente mostrano efficaci rappresentazioni iconiche, nel primo caso senza giustificazione numerica. L'allievo del primo protocollo rappresenta le biglie con pallini, ma a differenza del terzo protocollo le dispone spazialmente in modo da rendere chiara a colpo d'occhio la suddivisione indicata dalla frazione "un quarto". Lo stile del secondo protocollo è senza dubbio più grafico; il bambino ha voluto disegnare anche uno schizzo dei tre personaggi (Laura, Giorgio e Sandro): questo indica la necessità di drammatizzare il contenuto del testo per meglio comprenderlo e rappresentarsi mentalmente la situazione. Da un punto di vista didattico, spronare gli allievi a rappresentare la situazione di un problema in un qualsiasi registro (grafico, iconico, aritmetico ecc.) è senza dubbio di grande valore, dato che potrebbe contribuire alla comprensione delle relazioni numeriche espresse dal testo di un problema.

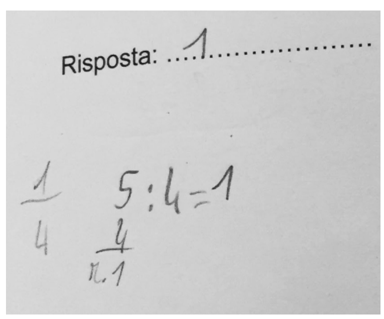






La maggior parte degli allievi che risponde in modo errato (27,9%) fornisce come risposta 1 (8,7%). Andando ad indagare nei protocolli troviamo la causa di questa risposta. In generale l'allievo, leggendo "la metà", non si preoccupa di capire la relazione esposta dal testo, bensì opera la divisione 10 : 2 = 5. Una volta individuato il numero di biglie di Giorgio (5) si trova in difficoltà a trovare quello di Sandro, ¼ di 5. La risposta 1 è quindi giustificata dal fatto che l'allievo trovandosi di fronte ad una divisione con resto decide di considerare il quoziente e tralasciare il resto (vedi protocolli).

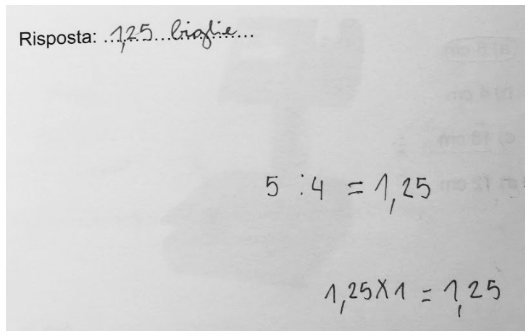


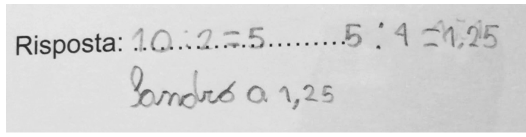


Ci sono allievi che di fronte a questa divisione reagiscono in modo completamente diverso. Si vedano i protocolli della pagina seguente, dove l'allievo riporta il risultato decimale della divisione 5 : 4, non curante del fatto che non ha senso parlare di 1,25 biglie. Questo fenomeno piuttosto diffuso in tale livello scolastico, e non solo, ci riporta ad uno studio condotto da Schoenfeld (1987) sull'approccio utilizzato dagli allievi nella risoluzione di divisioni non intere[5]. Non ha importanza che si tratti di camion o biglie: gli allievi risolvono il problema pensando esclu-

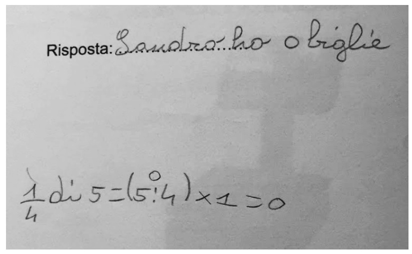
[5] La ricerca si basa sull'analisi delle risposte di un campione di allievi di varie età al quesito: *Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?*

sivamente all'operazione aritmetica. Il contesto diventa qualcosa di superfluo e viene completamente dimenticato non appena sono stati isolati i numeri e si è individuata l'operazione da eseguire con essi. È evidente che il lavoro in classe spesso troppo orientato all'automatizzazione dei processi rischia di incrementare questi comportamenti. Ciò che invece è auspicabile è abituare i bambini ad analizzare le situazioni, selezionare i dati ed individuarne la funzione all'interno del contesto, elaborare e regolare strategie di risoluzione, e confrontare e validare i risultati ottenuti in base alle richieste del testo.

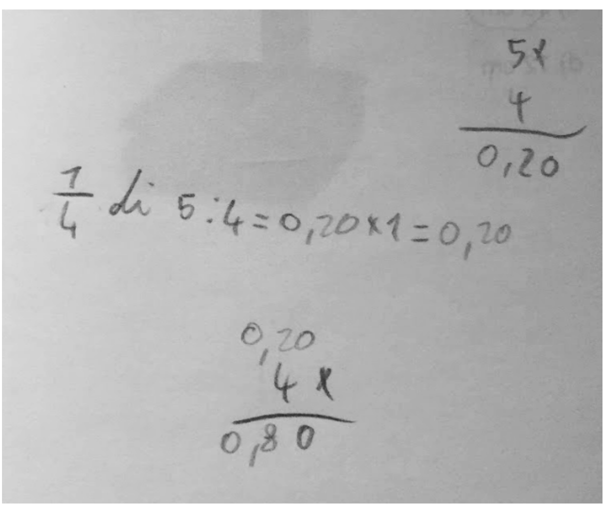


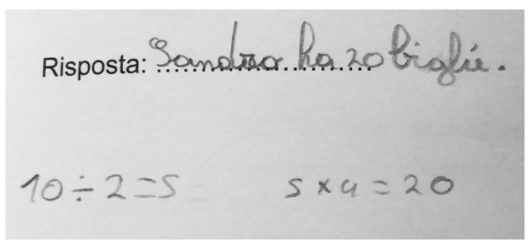


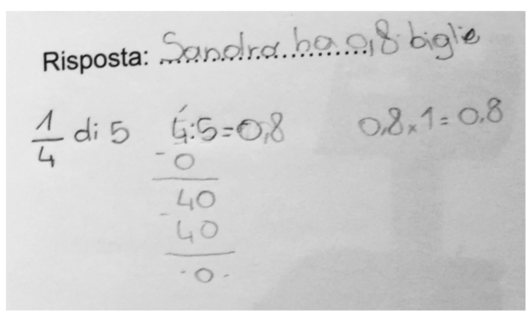
Tra coloro che si trovano a calcolare ¼ di 5 segnaliamo anche allievi che commettono errori di calcolo, come nel protocollo a fianco, o concettuali, come in quelli seguenti.



> «Uno stesso errore può avere cause molto diverse, ovviamente, e dipendere da problemi distinti e specifici dell'apprendimento. Il problema per l'insegnante è quindi quello di "analizzare" (nel senso di "guardare in maniera analitica") l'apprendimento degli allievi; di disporre di categorie che gli permettano di "scomporre" i diversi fenomeni dell'apprendimento della matematica, che rimane ovviamente un fatto sostanzialmente unitario».
>
> (Fandiño Pinilla, 2014, p. 71)

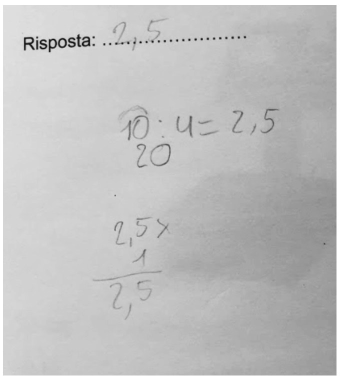


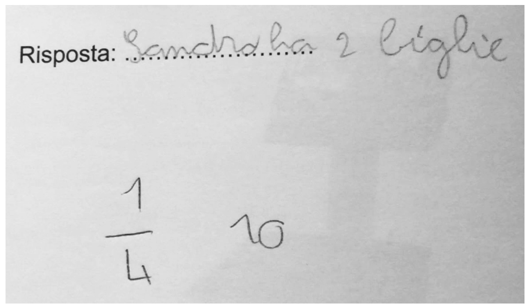




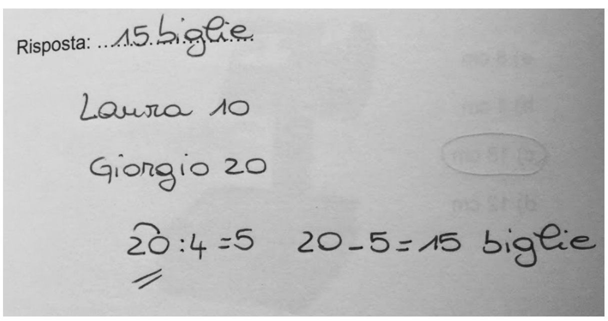
Nei primi due protocolli della pagina precedente, gli allievi moltiplicano i numeri 5 e 4 invece di dividere, nell'ultimo invece l'allievo divide 4 per 5, invertendo il ruolo del numeratore e del denominatore.

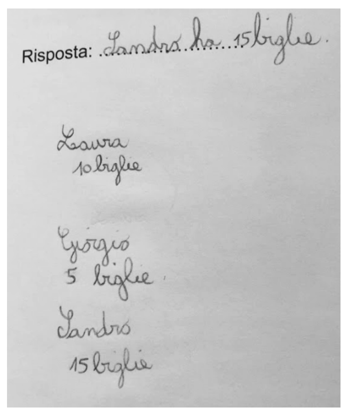
Il 4,9% fornisce come risposta 2 o 2,5. Indagando sui protocolli sembra che l'allievo non consideri affatto l'informazione legata alle biglie di Giorgio, ma interpreti come se il numero di biglie di Sandro siano ¼ di quello di Laura esplicitato nel testo. Le seguenti figure riportano due protocolli che lo testimoniano. In alcuni casi l'allievo riporta il risultato della divisione 10 : 4 = 2,5, in altri decide di considerare solo la parte intera riportando 2.



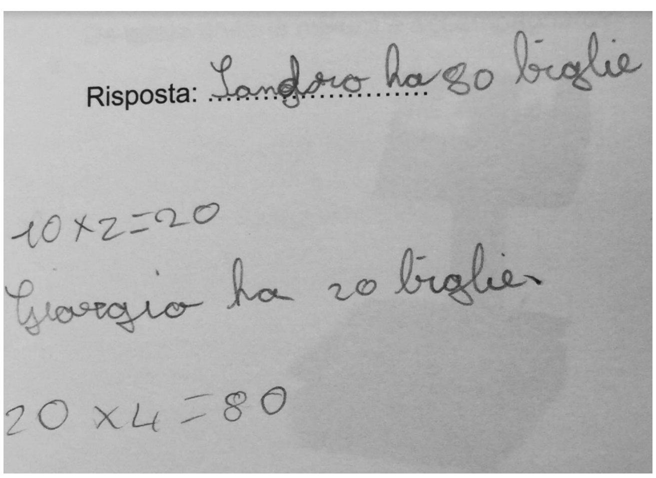


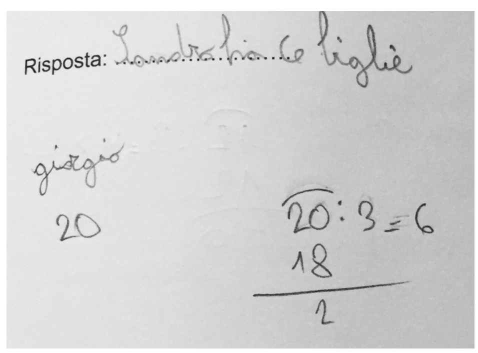
Il 3,0% risponde 15, dato difficilmente interpretabile. Si può supporre che questi allievi abbiano sottratto 5 da 20, oppure addizionato 10 e 5, come sembra emergere dai protocolli seguenti.

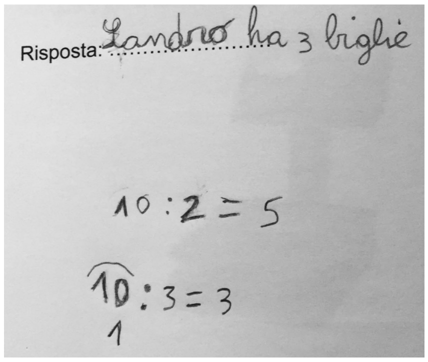




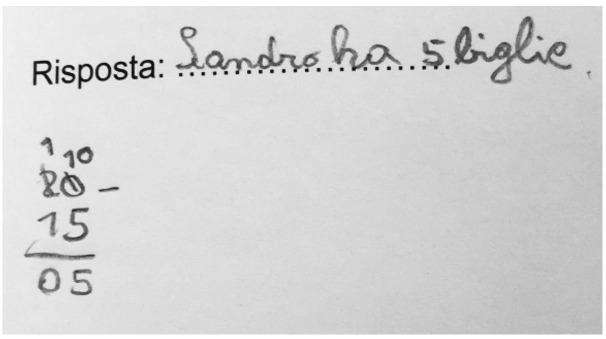
Nella categoria "Altro" sono presenti risposte di diverso tipo. Di seguito si riporta qualche esempio:

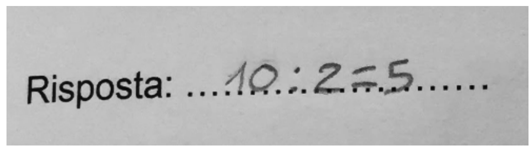






Di seguito mostriamo alcuni protocolli che riportano la risposta corretta ottenuta da un procedimento sbagliato. Purtroppo non è possibile capire quale percentuale di risposte corrette è dettata da un ragionamento o procedimento errato, se non in quei casi in cui l'allievo lo espone. Questo è il pericolo di un'indagine limitata solo alla codifica delle risposte aperte univoche senza che segua un'analisi più dettagliata dei protocolli.





Seconda somministrazione.
Per entrare nel dettaglio di queste risposte e validare le ipotesi a priori, è stato scelto di riproporre l'item nella scuola media. Come si può osservare dalla seguente tabella, i dati raccolti nella seconda somministrazione sono paragonabili a quelli della prima. Le risposte corrette sono inferiori ma rimangono intorno al 50%. Sono aumentate le risposte mancanti (poco meno del 20%), considerando anche quelle legate ad una incomprensione del testo. Il numero di risposte errate rimane intorno al 30%.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	58,1 %	52,3 %
Risposte errate	27,9 %	29,3 %
Risposte mancanti senza motivazione	14,0 %	14,4 %
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	4,0 %

Le risposte errate in questa seconda somministrazione possono essere identificate attraverso le stesse categorie osservate nell'indagine precedente anche se le percentuali sono leggermente variate come si vede dalla seguente tabella.

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
1 oppure 1,25	8,7%	5,2%	4
2 oppure 2,5	4,9%	4,0%	3
15	3,0%	1,1%	1
4	2,4%	5,2%	4
Altro	8,9%	13,8%	2

Le interviste hanno confermato le difficoltà ipotizzate in riferimento alle risposte raccolte nella precedente somministrazione. In aggiunta, hanno permesso di farne emergere delle altre.

In particolare, la risposta errata più scelta in entrambe le somministrazioni è 1. L'ipotesi alla base di tale errore è legata alla difficoltà di interpretazione della frase: "Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio", scaturita dai protocolli in cui sono stati esplicitati i processi risolutivi attivati dagli studenti che rispondono in questo modo (ultimi due protocolli a p. 158). Tale ipotesi era supportata dalla scelta dello studente di svolgere l'operazione 10 : 2 che poteva essere collegata al procedimento per determinare il numero di biglie di Giorgio.

Tutte le interviste effettuate sulla seconda popolazione hanno confermato tale ipotesi, come si può osservare nei due esempi seguenti.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
1 5 : 4 = 1,25	I.: "La prima domanda che ti faccio si riferisce al problema delle biglie. Tu hai risposto 1 e hai fatto questo calcolo che ti porta ad avere 1,25. Come hai fatto a rispondere?" A.: "Qua mi chiede: "Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio". Quindi diviso 2 fa 5. E "Sandro possiede un quarto delle biglie di Giorgio", vuol dire che 5 lo divido in 4 parti. Ma soltanto che una di quelle 4 parti è u… è come dire… è 1,25 + 1,25 per 4 volte…beh, insomma: questo + questo + questo + questo (indica ripetutamente il risultato 1,25) che fa 5. Quindi le biglie intere sono una." I.: "Però, adesso, cosa ti chiede questa domanda? Andiamo a vedere, prova a rileggere il testo." L'allievo legge ad alta voce. I.: "Quante biglie ha Laura?" A.: "Laura ne ha 10." I.: "Giorgio quante ne ha?" A.: "5." I.: "Sei sicuro?" L'allievo rimane in silenzio. I.: "Che cosa significa che Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio?" A.: "Ah, 20! Quindi 20 diviso… fa 5! Quindi qua non è una biglia ma sono 5 biglie!"

1	I.: "Questa qui delle biglie. Che cosa chiedeva?" A.: "Che Laura ha 10 biglie mentre Giorgio ne ha la metà e Sandro possiede un quarto delle biglie che ha Giorgio. Quante biglie ha Sandro?" I.: "Ok, quindi come è venuto fuori questo risultato?" A.: "Allora 10, la metà di 10 è 5… Sandro possiede un quarto… mi sembrava 0 1 o 2." I.: "Aspetta però, Giorgio quante biglie ha? Qui dice che Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio, cosa significa? Giorgio ha più o meno biglie di Laura?" A.: "Ah, ne ha di più! quindi mi sono confuso!" I.: "Quindi Giorgio ne ha…" A.: "20." I.: "E Sandro?" A.: "Ne…ha….5!"

Le difficoltà linguistiche che si riscontrano nell'interpretare il primo periodo del testo hanno anche un secondo risvolto: alcuni allievi che hanno fornito una risposta errata, hanno indicato come soluzione 2 oppure 2,5. In questi casi, nella prima somministrazione, pochi allievi hanno esplicitato il processo risolutivo (divisione 10 : 4). Ciò può suggerire la scelta di bypassare la lettura e comprensione del testo per focalizzare l'attenzione solo su alcuni dati numerici: 10 e "un quarto".

Tale ipotesi è confermata da alcune interviste svolte nella seconda sperimentazione; come possiamo notare dall'intervista seguente, l'allievo ammette di non essersi soffermato a leggere attentamente tutto il quesito.

Risposta fornita	**Trascrizione dell'intervista**
10 : 4 = 2,5	I.: "Mi sapresti dire con tue parole cosa ti veniva chiesto?" A.: "Laura possiede 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio." I.: "Quindi Giorgio quante biglie ha?" A.: "20 e Sandro possiede ¼ delle biglie di Giorgio." I.: "Cosa significa che Sandro ne ha un quarto?" A.: "Che ne ha la quarta metà di quelle di Giorgio. Se non sbaglio devo fare 20 : 4." I.: "Ma tu hai fatto così?" A.: "No, ho fatto 10 : 4 perché ho letto qui "Laura ha 10" e poi… non ci ho pensato troppo." I.: "E poi, se guardi il risultato, è possibile avere 2,5 biglie?" A.: "No, ma non ci avevo pensato."

Analizzando le interviste, però, emergono anche aspetti nuovi che non erano stati ipotizzati a priori. Nei due esempi presentati di seguito, si può notare che gli allievi esplicitano una difficoltà nell'interpretare la prima frase e a determinare un quarto di un numero. Gli allievi determinano il numero di biglie di Giorgio pari a 5 e successivamente hanno difficoltà nel determinare un quarto di questo valore. Nel primo caso l'allievo mostra di non saper determinare un quarto di un numero, mentre nel secondo dichiara di non aver letto "un quarto" ma "metà".

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
2	I.: "Ti ricordi questo problema? Come hai fatto ad arrivare a 2?" L'allievo legge ad alta voce. A.: "Posso segnare?" I.: "Si, hai tutto il foglio." A.: "Allora, Laura ha 10 biglie (scrive L = 10); Giorgio ne ha la metà (scrive G = 5). Giorgio ne ha 5, Sandro possiede un quarto delle biglie di Giorgio quindi se Giorgio ne ha 5, un quarto dovrebbe essere... silenzio... 2." I.: "Quindi ¼ di 5 è 2?" A.: "Si, ¼ secondo me è 2!" I.: "Come hai fatto a trovare il 2?" L'allievo rimane in silenzio.
2,5 biglie	I.: "La prima domanda che ti faccio riguarda il problema delle biglie. Tu hai risposto che Sandro ha 2,5 biglie. Come hai fatto a trovare questo numero?" A.: "Io ho fatto 10 : 2 perché Giorgio ne aveva la metà e poi dopo qui non ho capito più niente, ho sbagliato perché ho calcolato la metà invece che fare un quarto." I.: "Ah, quindi siccome Giorgio ha 5 biglie invece di determinare un quarto delle biglie hai fatto la metà che è 2,5!" A.: "Sì."

Tra le risposte errate, come già evidenziato, si trovano in una percentuale non trascurabile le risposte 15 (3,0%) e 4 (2,4%). Di queste non sono stati individuati protocolli in cui fosse esplicitato in modo chiaro la motivazione dietro questa scelta. Per questo, le informazioni raccolte dalla seconda somministrazione potrebbero essere fondamentali per comprendere le possibili cause di errore.
Tuttavia dalle interviste non emerge una motivazione comune tra gli studenti che hanno risposto 4 o 4,5. Un aspetto che accomuna tutti, però, è la difficoltà nel calcolo delle biglie di Sandro e dunque nella determinazione di un quarto di un valore numerico prestabilito.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
Sandro ha 4,5 biglie	I.: "Proviamo il quesito delle biglie. Proviamo a capire; cosa mi chiede questo testo?" L'allievo legge ad alta voce. I.: "Raccontami con le tue parole che cosa hai capito di questo problemino." A.: "Che Laura ne ha 10 e Giorgio la metà quindi 5." I.: "A questo punto cosa si fa?" A.: "4 perché 5 - 1,5." I.: "Perché 5 - 1,5?" A.: "Perché Sandro ne ha un quarto quindi meno, allora faccio 5 - 1,5 e scopro quante ne ha Sandro." I.: "Ah, ok, 5 - 1,5 quanto fa?" A.: "4,5."

Sandro ha 4 biglie	I.: "Questo esercizio qui delle biglie, te lo ricordi?" A.: "Sì." I.: "Hai detto che Sandro ha 4 biglie; puoi farmi vedere come hai fatto a trovare questa risposta?" A.: "Laura ha 10 biglie che sono la metà di quelle di Giorgio, quindi Giorgio ha 20 biglie." I.: "Sì." A.: "Sandro possiede un quarto delle biglie; 4 : 5… eh… 5 : 20… allora Sandro ha 4 biglie." I.: "Aspetta, ripetimi che non ho capito." A.: "Sandro possiede un quarto delle biglie di Giorgio. Devo fare 5 : 20 che fa 4." I.: "Perché 5 : 20?" A.: "Perché noi facciamo sempre così, trovo quel risultato che mi da il numero. 5 × 4 fa 20." I.: "Cos'è un quarto di 20?" A.: "Ah, è 5!"

Anche chi ha risposto 15 esplicita una difficoltà legata al calcolo delle biglie di Sandro. Come si può osservare dall'esempio, infatti, lo studente determina correttamente il valore delle biglie di Giorgio ma, per calcolare quello di Sandro, lo studente commette un errore. In particolare, egli crede di dover togliere da 20 il valore corrispondente ad un quarto e quindi crede che le biglie di Sandro siano i ¾ delle biglie di Giorgio.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
15	I.: "Quella delle biglie? Ho visto che hai scritto 15 ma non hai fatto vedere come lo hai trovato." A.: "Allora, io ho fatto 5 × 4." I.: "E da dove viene?" A.: "Perché io dovevo arrivare a 20 e trovare ¼ . Quindi 5 è ¼ e poi ho tolto."

3.5.4) Le due botti raffigurate contengono insieme 160 litri di vino. La botte A contiene 20 litri in più della bottiglia B.

Quanti litri di vino contiene ciascuna botte?

a) botte A: 120 litri, botte B: 40 litri
b) botte A:100, botte B: 80 litri
c) botte A: 80, botte B: 60 litri
d) botte A: 90, botte B:70 litri

Risposta corretta: d
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
11,4%	15,8%	8,1%	53,2%	11,5%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare il procedimento	52,4%
L'allievo propone una risposta corretta mostrando il procedimento risolutivo	0,8%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita procedimenti sul foglio	36,4%
L'allievo mostra il procedimento risolutivo	1,4%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

3.5.5) Luca e Gabriele assieme pesano 56 kg. Luca pesa 8 kg in più di Gabriele. Quanto pesa Gabriele?

Risposta: ....

Risposta corretta: 24 kg
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
13,4%	46,1%	40,5%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone la risposta corretta senza esplicitare il procedimento	9,3%
L'allievo propone la risposta corretta mostrando il procedimento scelto	4,1%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica la risposta 20 kg, a volte esplicitando la procedura	15,2%
L'allievo indica la risposta 48 kg (differenza tra i due numeri del testo)	9,8%
L'allievo indica la risposta 28 kg	4,1%
L'allievo indica la risposta 36 kg	2,8%
L'allievo indica la risposta 7 kg (divisione tra i due numeri del testo)	1,2%
Altro	13,0%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

I due quesiti sono stati disposti in sequenza in quanto hanno alcune caratteristiche in comune e altre differenti. Le diversità dipendono principalmente dai seguenti aspetti: tipologia del quesito (il primo è a risposta chiusa con quattro opzioni di scelta, mentre il secondo è a risposta aperta univoca), contesto della situazione, grandezze coinvolte (capacità nel primo e massa nel secondo). Sono molto diverse anche le percentuali di risposte corrette: il 53,2% nel primo quesito e il 13,4% nel secondo. Nonostante le molteplici differenze evidenziate, ciò che li accomuna è il modello matematico che permette agli allievi di arrivare alla soluzione; la tipologia di relazione esplicitata nei due testi è, infatti, la stessa: in entrambi si fornisce la somma delle due grandezze in gioco e la loro differenza e si chiede di individuare il valore di entrambe le grandezze.

I due problemi proposti si riferiscono ad una campo numerico ampiamente consolidato in quinta elementare (numeri naturali minori di 200), la difficoltà risiede nel riuscire a comprendere le relazioni numeriche in gioco. I risultati deludenti (soprattutto nel secondo quesito) richiedono una riflessione. Dal punto di vista didattico è importante proporre attività che consentano agli allievi di esplorare relazioni tra numeri o grandezze. Uno dei nodi fondamentali dell'apprendimento della matematica è proprio gestire e risolvere situazioni problema in contesti "relazionali" in cui si richiede la capacità di mettere in relazione aspetti lessicali e funzionali, che rappresentano anche un'ottima occasione per l'avvio al pensiero algebrico, dato che favoriscono la costruzione di solide basi per la comprensione del significato degli oggetti e dei processi algebrici.

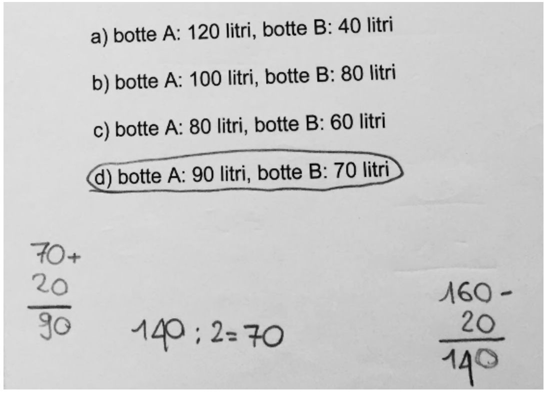
In quesiti di questo tipo si possono evidenziare diverse strategie risolutive per tentativi legate anche al processo *Esplorare e provare*, che coinvolgono l'uso di diverse rappresentazioni semiotiche: schemi, disegni, operazioni aritmetiche ecc., in parte legate a formalismi matematici. Questa ricchezza è senz'altro un aspetto interessante di questo tipo di problemi. A questo proposito (come già esplicitato nel paragrafo 2.3.) la letteratura in didattica della matematica (Duval, 1998) ribadisce l'importanza di insegnare a riconoscere, gestire e utilizzare diverse rappresentazioni in vari registri semiotici; avere a disposizione un maggior numero di rappresentazioni permette di cogliere più aspetti dell'oggetto matematico rappresentato.

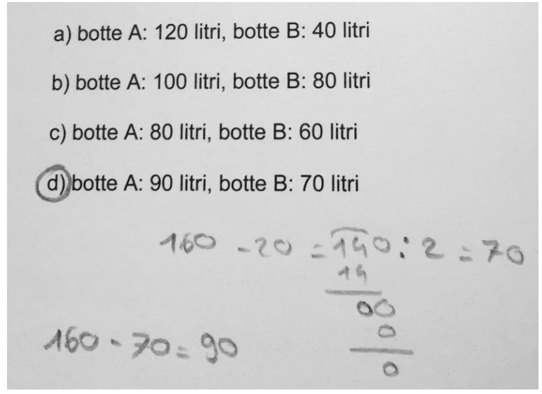
Nell'analisi delle differenze di prestazioni degli allievi nei due quesiti è necessario tenere conto del fatto che, statisticamente, a parità di richiesta, le domande aperte registrano percentuali di risposte corrette più basse. Di fatto gli allievi sono maggiormente portati a ragionare per esclusione o per stima in una domanda a risposta chiusa, cosa che non è possibile fare in quelle aperte. Inoltre il primo quesito è il decimo del secondo fascicolo e registra solo l'11,5% di risposte mancanti o non valide (due o più scelte), mentre il secondo quesito è inserito nella trentanovesima posizione del primo fascicolo e registra il 40,5% di risposte mancanti. Analizziamo ora nel dettaglio i due quesiti.

Primo quesito.
Poiché in tutte e quattro le opzioni sono presenti le capacità di entrambe le botti A e B, l'allievo non è costretto a costruire un modello matematico che traduca la situazione esposta, ma potrebbe agire direttamente sui dati e verificare quale delle quattro opzioni è quella giusta, ossia quale delle quattro coppie di numeri (120 - 40, 100 - 80, 80 - 60, 90 - 70) verifica le due condizioni: la somma è 160 e la differenza è 20. Leggendo il quesito in questo modo, si potrebbe far rientrare nel processo cognitivo *Interpretare e riflettere sui risultati* previsto dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo* (DECS, 2015). Un docente potrebbe assegnarlo con l'obiettivo di chiedere all'allievo di assumere un atteggiamento critico di fronte a un procedimento, una strategia o un risultato, mettendo in atto strategie di verifica della loro attendibilità, di pertinenza con le condizioni della situazione-problema affrontata.

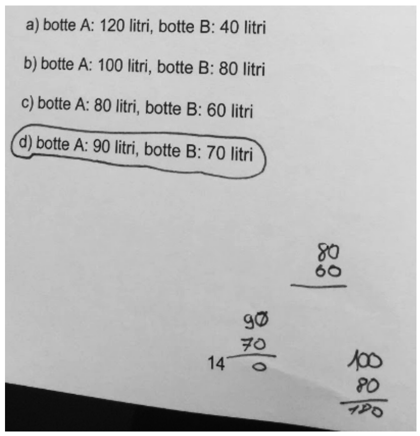
Tutte le opzioni soddisfano almeno una delle due condizioni, tranne la d) (risposta corretta) che le soddisfa entrambe. Inoltre la botte A contiene sempre una quantità maggiore di liquido. L'immagine presente nello stimolo non aiuta a individuare la risposta corretta, anzi, potrebbe essere di ostacolo alla risoluzione, ma l'intento dell'autore era probabilmente di rendere più comprensibile la situazione.

Tra le risposte corrette, sono interessanti i protocolli che mostrano il procedimento seguito, sempre di tipo aritmetico. Non sono emerse nei fascicoli risoluzioni che coinvolgono rappresentazioni figurali. Di seguito si riportano due esempi di protocolli corretti, che seguono procedimenti uguali per individuare la capacità della prima botte e diversi per la seconda botte.

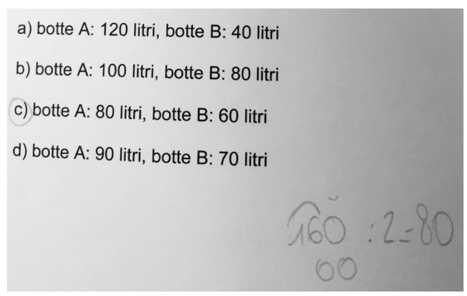




Il seguente protocollo, invece, fa intuire una procedura per tentativi che va a verificare se, nelle opzioni, la somma e la differenza dei numeri è coerente con quanto richiesto dal testo. Per la somma delle due capacità l'allievo valuta solo tre opzioni che vengono scritte nel protocollo, presumibilmente perché la prima viene subito scartata dato che non verifica la condizione sulla differenza delle due capacità.



Tra le opzioni errate, due contengono il valore 80: la b) e la c), le cui percentuali di risposta sono rispettivamente 15,8% e 8,1%. Gli allievi che le hanno scelte hanno probabilmente diviso per due la totalità dei litri senza soffermarsi sul fatto che le botti non erano uguali (protocollo a fianco).

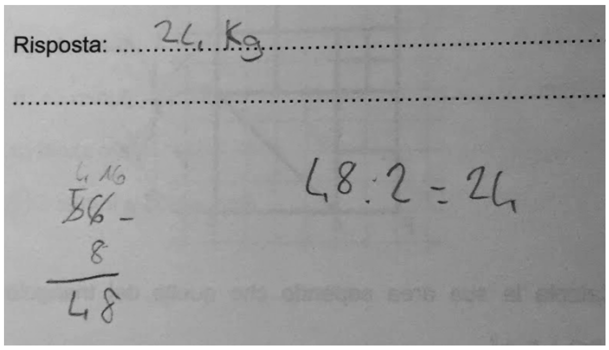


Va considerato che, come già accennato in precedenza, l'immagine inserita nello stimolo potrebbe aver inciso negativamente sulle considerazioni condotte dagli allievi, in quanto le due botti rappresentate appaiono di capacità molto simile. L'opzione a) viene scelta dall'11,4% degli allievi.

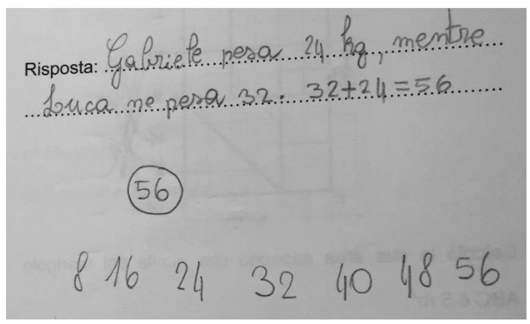
Secondo quesito.
Questo quesito è certamente più complesso del primo, lo testimonia la bassa percentuale di risposte corrette ottenute. La richiesta è molto simile, tuttavia, non essendoci opzioni da verificare, l'allievo deve costruire una propria strategia risolutiva. È interessante riflettere su come una stessa situazione, proposta in modo diverso, possa permettere di far lavorare gli allievi su competenze completamente diverse. Come già esposto nel capitolo 2, il compito più arduo, allo scopo di riuscire a risolvere il problema, è quello di tradurre la situazione reale in un model-

lo matematico rappresentato tramite schema, espressione numerica, operazione aritmetica ecc., così da poter essere manipolato matematicamente. Anche in questo caso una delle possibili strategie è quella di eliminare la differenza dalla somma e dividere per due, trovando così la massa più piccola; oppure quella di sommare la differenza alla somma delle due grandezze e dividere per due, trovando in questo caso la massa più grande. Come per il quesito precedente, esistono poi strategie empiriche che si basano su vari tentativi per giungere alla soluzione.

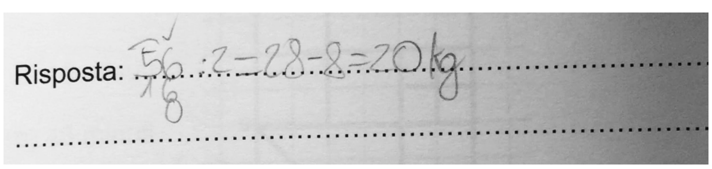
Solo il 4,1% sente l'esigenza di scrivere le operazioni effettuate per individuare la soluzione corretta. Di seguito riportiamo un protocollo di un allievo che mostra un procedimento aritmetico corretto.



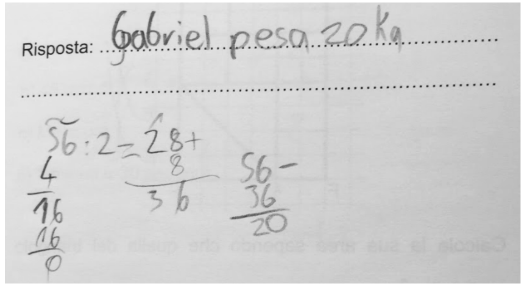
Il protocollo a fianco mostra invece un procedimento euristico basato sull'esplorazione di una serie di numeri che differiscono tra loro di 8. Tra questi sono stati scelti quelli la cui somma è 56. L'allievo ha indagato i multipli di 8, anche se in problemi di questo tipo non è detto che la soluzione sia un multiplo della differenza. Ad ogni modo, in questo caso specifico la strategia utilizzata è vincente.



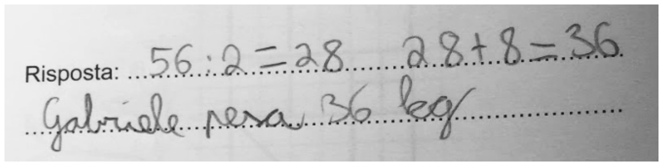
Tra coloro che sbagliano la risposta, un terzo circa individua 20 come risposta, invertendo le due operazioni (divisione e poi sottrazione). Questo procedimento potrebbe indicare una lettura selettiva del testo e dunque la mancanza di comprensione dell'informazione fornita nella sua totalità. L'allievo potrebbe supporre dalla prima frase ("Luca e Gabriele assieme pesano 56 kg") che i due bambini abbiano la stessa massa, operando dunque con la divisione per ottenere la massa di uno dei due (56 : 2 = 28). Proseguendo la lettura ("Luca pesa 8 kg in più di Gabriele") l'allievo utilizza la sottrazione per trovare la massa del bambino più leggero (28 – 8 = 20). Di seguito si riporta un protocollo di questo tipo.



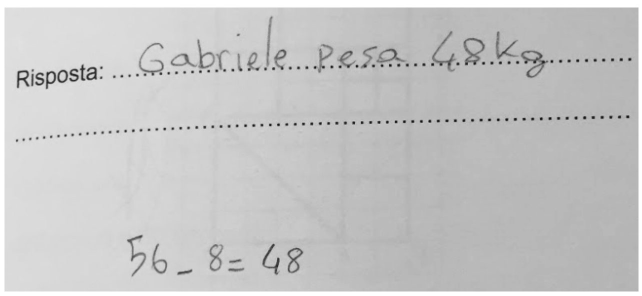
In modo analogo, alcuni allievi hanno ragionato individuando la massa del bambino più pesante, aggiungendo 8 al 28 trovato precedentemente (28 + 8 = 36) e poi calcolando per differenza la massa del bambino più leggero (56 – 36 = 20), come mostra il protocollo a pagina seguente.



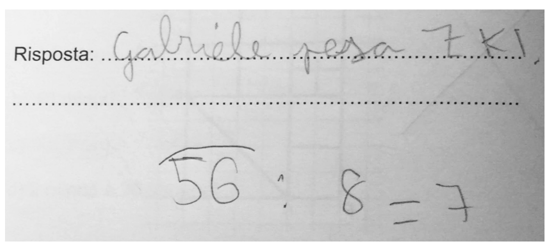
Seguendo lo stesso procedimento, il 2,8% risponde 36, identificando dunque la massa maggiore, seppur sbagliata, e non quella minore come richiesto dal quesito (protocollo seguente).



Il 9,8% risponde 48, giustificandolo con la differenza dei due numeri presenti nel testo, come si evince dal seguente protocollo.

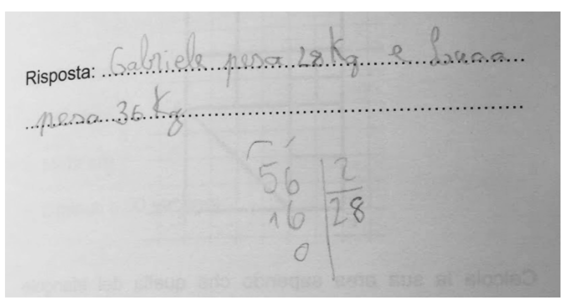


Alcuni allievi (1,2%) dividono i due numeri presenti nel testo (protocollo sotto).

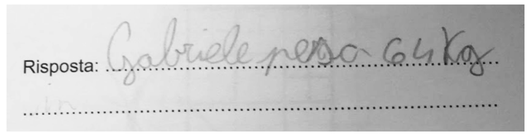


Comportamenti di questo tipo, basati sull'operare con i numeri presenti nel testo, senza comprendere il legame espresso dal testo, come già discusso, sono spesso legati a clausole del contratto didattico instaurate in classe e si riscontrano nella risoluzione di problemi.

Il 4,1% indica come soluzione la metà di 56 kg, ossia 28 kg (protocollo sotto). Questi allievi hanno desunto dallo stimolo che le due masse sono uguali, senza dedurre dalle informazioni implicite contenute nel testo che vi è una differenza tra le due ("Luca pesa 8 kg in più di Gabriele").



Molto più raramente viene fornita la risposta 64, inserita nella categoria "Altro", che corrisponde alla somma dei due numeri presenti nel testo (protocollo a fianco).



Seconda somministrazione.
Il quesito è stato somministrato anche agli allievi di prima media. Di seguito riportiamo le percentuali delle due somministrazioni a confronto.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	Percentuali seconda somministrazione (I SM)
Risposte corrette	13,4%	14,4%
Risposte errate	46,1%	66,7%
Risposte mancanti senza motivazione	40,5%	9,8%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	9,1%

Anche in questo caso si ha una notevole diminuzione di risposte mancanti a favore però di risposte errate, segno che è il tempo il fattore che vincola la mancata risoluzione degli ultimi quesiti del fascicolo.

Le risposte errate fornite in questa somministrazione possono essere interpretate attraverso le stesse categorie osservate nell'indagine precedente.

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo indica la risposta 20 kg, a volte esplicitando la procedura	15,2%	22,4%	6
L'allievo indica la risposta 48 kg (differenza tra i due numeri del testo)	9,8%	8,6%	6
L'allievo indica la risposta 28 kg	4,1%	9,8%	-
L'allievo indica la risposta 36 kg	2,8%	9,2%	2
L'allievo indica la risposta 7 kg (divisione tra i due numeri del testo)	1,2%	1,7%	1
Altro	13,0%	15,0%	5

Confrontando le percentuali relative alle diverse tipologie di risposta, possiamo osservare che in alcuni casi (prima, terza e quarta riga) i risultati raccolti dalla seconda somministrazione si differenziano da quelli raccolti nella prima; questo aumento di risposte scorrette deriva, come già anticipato, dal maggior numero di allievi che risolve il quesito rispetto alla prima somministrazione. Di seguito si riportano alcuni stralci di interviste effettuate agli allievi di prima media per comprendere meglio le motivazioni che sostengono tali scelte.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
56 – 8 = 48 Kg Gabriele pesa 48 Kg	I.: "Come hai fatto a trovare 48?" A.: "Ho fatto 56 che è quanto pesano tutti e due assieme meno 8 che è il peso di Luca." I.: "8 kg è il peso di Luca?" A.: "Sì." I.: "Prova a leggere questa frase." A.: "Luca pesa 8 kg in più di Gabriele… ahhhh ah pesa 8 kg in più… Avevo capito Luca pesa 8 kg, in più Gabriele."

La prima intervista fornisce un'interessante chiave di lettura di un tipo di errore non ipotizzata a priori, che rientra più che altro in aspetti linguistici che ricadono nell'interpretazione del modello matematico. L'allievo spezza la frase, inserendo mentalmente una virgola, una "separazione": "Luca pesa 8 kg, in più Gabriele", come se volesse dichiarare il peso di Luca e aggiungere che in più oltre a Luca c'è Gabriele, stravolgendo dunque il senso della frase e dando una connotazione completamente diversa alla locuzione "in più" che assume il senso di un avverbio sinonimo di "inoltre".

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
A questa domanda non posso rispondere perché non ho abbastanza dati.	I.: "Cosa chiedeva questo problema?" A.: "Chiedeva quanto pesava Gabriele. Io so che insieme pesano 56 kg e Luca pesa 8kg in più di Gabriele. Io ho risposto che non ho abbastanza dati perché io non so quanto pesa Luca, so solo che pesa 8 kg in più di Gabriele e se faccio 56 - 8 peserebbe troppo poco Luca e Gabriele, peserebbe tantissimo per farlo assieme."

La seconda intervista rivela invece come l'allievo non sia capace di mettere in relazione due dati, sfruttando due condizioni. Sembra aver compreso il significato della consegna, ma non riesce a trovare un modello matematico coerente con il testo, che permetta di trovare la soluzione. Inoltre, denota una buona capacità critica quando osserva che facendo la differenza tra 56 e 8, Luca peserebbe troppo poco e Gabriele tanto. L'allievo intuisce, quindi, che l'applicazione di tale operazione non può andare bene, dato che la differenza tra le due masse non è tanta, ma attribuisce la causa a una presunta mancanza di dati e non a una sua carenza nell'interpretazione della situazione.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
Gabriele pesa 23 Kg. 25 + 8 = 33 24 + 8 = 32 23 + 8 = 31	I.: "Come hai fatto a trovare la soluzione?" A.: "Ho pensato di fare 56 - 8 ma poi ho pensato che era un po' insensato, allora dopo ho provato a fare i calcoli per sapere… 25 + 8." I.: "Perché sei partito da 25?" A.: "Perché 25 + 25 fa 50 e 25 + 8 = 33." I.: "E cos'è questo 33?" A.: "Pensavo che era il peso di Luca quindi con la mente ho provato a fare 25 + 33 ma mi usciva sbagliato quindi ho provato di scendere sempre un po'… poi ho provato 23 + 8 che mi usciva 31, poi ho fatto il peso di Luca che è 31 più quello di Gabriele che è 23 e mi è uscito 56." I.: "23 + 31 fa 56?" A.: "23+31… noooo!" I.: "Quanto fa?" A.: "54!" I.: "Allora quale può essere la soluzione corretta?" L'allievo pensa. I.: "23 è troppo poco o è troppo?" A.: "Troppo poco." I.: "Ok quindi?" A.: "24… (fa calcoli a mente) ah ecco!"

Nell'ultima intervista si riporta il ragionamento di un allievo che fornisce una risposta scorretta, ma che evidenzia un'ottima capacità di ragionare e di tenere sotto controllo tutti i passaggi e le informazioni utilizzate. Un "banale" errore di calcolo, l'ha condotto verso una risposta errata. L'allievo procede per tentativi dimostrando capacità di stima (25 è vicino alla metà di 56, 23 è troppo poco rispetto al peso che stiamo cercando) e un continuo controllo del senso delle operazioni che sta effettuando a mente, competenze fondamentali per riuscire in ambito matematico.

3.5.6) La somma delle cifre di un numero naturale minore di 100, è 12; la cifra delle decine è il doppio di quella delle unità. Di quale numero si tratta?

Risposta: ....

Risposta corretta: 84
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
3,9%	36,4%	59,7%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone la risposta corretta senza esplicitare procedimenti risolutivi	3,9%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo indica la risposta 42	6,3%
L'allievo indica la risposta 24	4,6%
L'allievo indica la risposta 22	3,3%
L'allievo indica la risposta 6	3,2%
L'allievo indica la risposta 14	2,8%
L'allievo indica la risposta 12	2,0%
Altro	14,2%

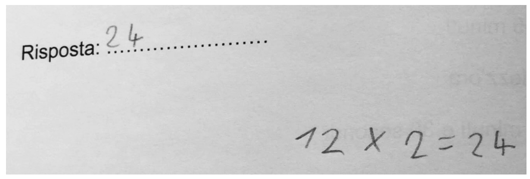
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

Questo quesito ha registrato la percentuale più bassa di risposte corrette tra tutti i 90 quesiti proposti nei due fascicoli (3,9%) e la più alta percentuale di risposte mancanti (59,7%). Il quesito è il quarantaduesimo del primo fascicolo e ciò senza dubbio ha inciso nei risultati ottenuti.

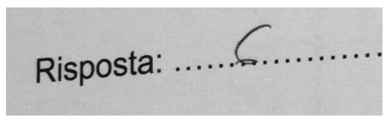
La situazione proposta nella domanda richiede un ragionamento analogo a quello visto nei due quesiti precedenti, in quanto a partire dalla relazione tra due numeri (le cifre di un numero in questo caso) si richiede di risalire al valore di entrambi. Nel quesito si mettono in relazione due cifre, dunque numeri entrambi minori di 9, in quanto il testo specifica che il numero che si sta cercando è minore di 100. Numericamente quindi la difficoltà è piuttosto limitata, trattandosi di un contenuto disciplinare specifico del I ciclo, le cifre, che però spesso non viene istituzionalizzato dal docente. È, in effetti, molto frequente che gli allievi non conoscano il significato del termine "cifra". Inoltre, in quesiti di questo tipo, come mostrato nelle analisi precedenti, le difficoltà che incontrano gli allievi sono legate principalmente all'individuazione del modello matematico che descrive la relazione richiesta. Il contesto in cui è inserita la domanda, a differenza dei quesiti precedenti, è astratto, nonostante l'operazione aritmetica richiesta sia esattamente la stessa. In questo senso è interessante il pensiero di Goldin (1982) in riferimento ai problemi, per il quale differenze anche piccole a livello di caratteristiche quali: sintassi, contenuto, conte-

sto, o struttura, ne influenzano profondamente la difficoltà. In problemi con la stessa struttura matematica, particolare importanza assumono le variabili legate al contesto (Kulm, 1979).
Più che per gli altri quesiti, in questo caso l'allievo avrebbe potuto procedere per tentativi andando ad esplorare quali cifre tra le 10 possibili avrebbero potuto soddisfare la richiesta.

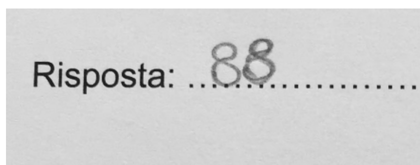
Gli allievi che maggiormente sbagliano scelgono come valori delle due cifre il 4 e il 2, rispettando la relazione tra la cifra delle decine e quella delle unità (4 è il doppio del 2), ma non la somma delle due (12). In particolare, il 6,3% risponde 42, osservando la condizione che le decine siano la cifra più alta (il doppio rispetto alle unità) e il 4,6% risponde 24 invertendo l'ordine delle due.



Quest'ultima ipotesi, ossia che gli allievi abbiano scelto due cifre una il doppio dell'altra come in parte richiesto dal quesito, ma le abbiano invertite, è smentita dall'osservazione del protocollo a fianco, nel quale si evince che l'allievo ha considerato 12, il dato presente nel testo che indica la somma delle due cifre e l'ha raddoppiato. Questo atteggiamento testimonia, come già visto nei precedenti quesiti, una lettura superficiale del testo per cui l'allievo considera l'intero numero e lo moltiplica per 2, come suggerisce la parola "il doppio". In questo caso si sottolinea anche una mancata comprensione del valore posizionale delle cifre e dunque della differenza di significato tra la parola "cifra" e "numero".



Il 3,2% risponde 6, in questo caso probabilmente ragionando in modo analogo all'allievo del precedente protocollo, ma operando inversamente, ossia dimezzando il 12 (protocollo a fianco).



Anche il protocollo a fianco evidenzia il tipico comportamento degli allievi deboli in ambito matematico, che tende a considerare solo i numeri presenti nel testo (solitamente solo quelli in cifre) e operare con essi cercando l'operazione più adatta. Questo comportamento è a volte spinto dalla consuetudine didattica di fornire problemi stereotipati strutturati in modo da soddisfare sempre questa richiesta. In questo caso probabilmente, essendo il numero da individuare minore di 100, l'allievo ha scelto di sottrarre a 100 il 12.

Si registrano poi risposte che contengono numeri diversi, difficilmente riconducibili alle scelte e ai ragionamenti degli allievi, anche a causa dell'assenza di scelte o spiegazioni nei protocolli. Il 2,8% fornisce la risposta 14, il 3,3% la risposta 22, il 2,0% la risposta 12 e il 14,2% numeri differenti.

3.6. Problemi con dati sovrabbondanti

3.6.1) La nonna mi consegna 70 fotografie e mi chiede di incollarle sull'album che ha appena ricevuto per il suo 80° compleanno. Sapendo che in ogni pagina ho incollato 6 fotografie e che alla fine del lavoro 4 foto non hanno trovato posto, quante pagine ha l'album?

Risposta: ....

Risposta corretta: 11
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
49,0%	24,8%	26,2%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare il procedimento	28,0%
L'allievo propone una risposta corretta mostrando come strategia risolutiva la divisione	18,7%
L'allievo propone una risposta corretta mostrando un processo risolutivo che richiede la moltiplicazione	2,3%

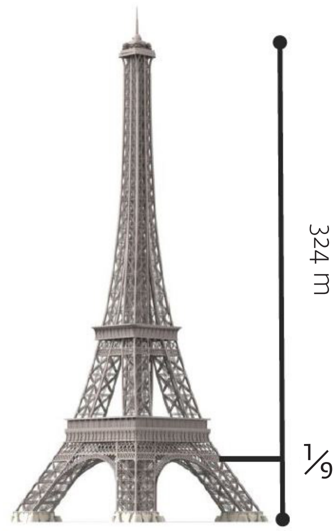
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta errata mostrando come processo risolutivo la sottrazione 70 - 4 = 66	4,9%
L'allievo propone una risposta errata mostrando un processo risolutivo che richiede la moltiplicazione	3,5%
L'allievo pur indicando un procedimento corretto commette errori di calcolo	3,4%
L'allievo propone due soluzioni numeriche (11 o 12)	2,8%
Altro	10,2%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione di tipo aritmetico espresso in forma linguistica in una sequenza di calcoli.

3.6.2) La Tour Eiffel è stata inaugurata nel 1889.
È alta 324 m e ha 1665 scalini!
Sto salendo per arrivare in cima quando vedo un cartello che mi infoma che ho già percorso $\frac{1}{9}$ della salita.

Di quanti metri sono già salito?

Risposta: ....



Risposta corretta: 36 m
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
46,9%	28,5%	24,6%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta mostrando il procedimento $\frac{1}{9}$ di 324 metri	34,7%
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare il procedimento	12,2%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo calcola $\frac{1}{9}$ di 1665	3,7%
L'allievo mostra un procedimento corretto ma commette errori di calcolo	4,5%
L'allievo indica come soluzione 9	2,0%
Altro	18,3%

Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

Entrambi i quesiti presentano nel testo alcuni dati numerici utili per avere informazioni dal punto di vista narrativo ma che non sono funzionali ad individuare il processo risolutivo. Nel primo testo è indicata l'età della nonna ("80° compleanno"), mentre nel secondo sono riportati due dati "sovrabbondanti" dal punto di vista del processo risolutivo, l'anno di inaugurazione della Torre Eiffel (1889) e il numero di scalini della struttura (1665).

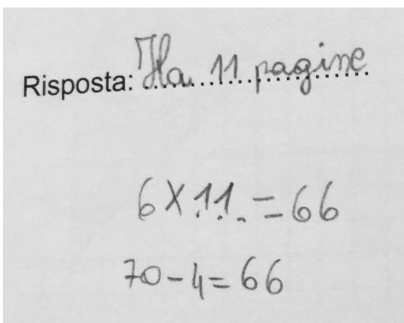
Le tipologie di testi che si allontanano dalle routine scolastiche sono raramente proposti dagli insegnanti, che preferiscono solitamente assegnare problemi ed esercizi "ben congeniati", cioè con tutti i dati necessari e sufficienti, che si legano l'uno con l'altro, messi in rilievo nello stimolo e addirittura a volte posizionati nello stesso ordine in cui vengono coinvolti nel processo risolutivo più evidente. Al contrario, la ricerca in didattica della matematica esorta gli insegnanti a:

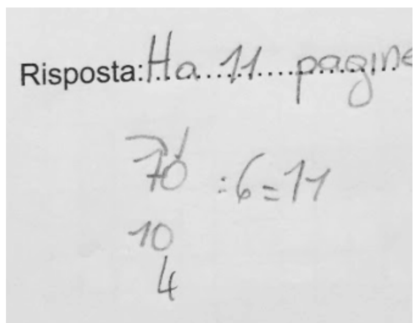
> «(...) staccarsi dai tradizionali esercizi e considerare problemi i cui iter risolutivi non siano del tutto conosciuti dagli allievi, i cui dati non siano sempre necessari e sufficienti alla risoluzione, le cui soluzioni non siano necessariamente univoche, le cui domande non siano sempre pertinenti e nemmeno sempre esplicitate».
>
> (Arrigo, 2009, p. 76)

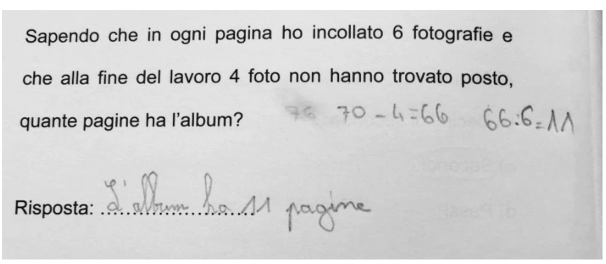
La percentuale di riuscita si attesta attorno al 50% per entrambi i quesiti (49,0% di risposte corrette al primo quesito e 46,9% al secondo), pur richiedendo conoscenze e abilità diverse per essere risolti. Le difficoltà degli allievi potrebbero quindi essere causate da fattori diversi, pur avendo in comune la presenza di dati sovrabbondanti.

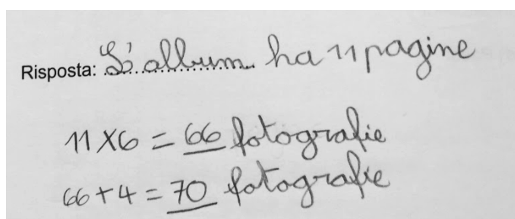
Primo quesito.

Il quesito è il trentunesimo del primo fascicolo e registra un 26,2% di risposte mancanti. Per essere risolto si possono scegliere diverse strategie: togliere 4 dal numero totale di fotografie e dividere il risultato per 6; eseguire la divisione 70 : 6, ricavando dunque il quoziente e verificando che il resto è 4; adottare un procedimento a ritroso di verifica utilizzando la moltiplicazione 6 x 11 = 66 e di conseguenza eseguire 66 + 4 = 70; adottare un procedimento passo a passo ecc. Gli allievi che hanno esplicitato un procedimento sono stati il 21,0%. Di seguito ne riportiamo alcuni:


Risposta: Ha 11 pagine
6 X 11 = 66
70 - 4 = 66

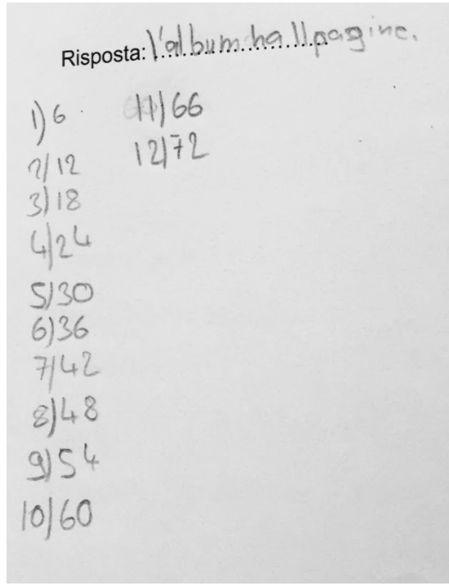

Risposta: Ha 11 pagine
70 : 6 = 11
10
4


Sapendo che in ogni pagina ho incollato 6 fotografie e
che alla fine del lavoro 4 foto non hanno trovato posto,
quante pagine ha l'album? 70 - 4 = 66 66 : 6 = 11
Risposta: L'album ha 11 pagine


Risposta: L'album ha 11 pagine
11 X 6 = 66 fotografie
66 + 4 = 70 fotografie

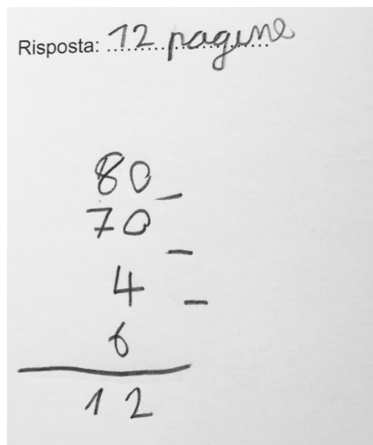
Il protocollo della pagina seguente è particolarmente significativo, in quanto l'allievo ha numerato le pagine, contando per ciascuna le fotografie attaccate fino a quel momento. Invece di affidarsi ad un algoritmo convenzionale, il ragazzo preferisce controllare il processo passo dopo passo, probabilmente immaginandosi di sfogliare l'album fotografico.

Dai protocolli considerati corretti, emergono stili e strategie risolutive assai diversi l'uno dall'altro e in cui gli strumenti della matematica vengono utilizzati con creatività per modellizzare la soluzione. È sicuramente produttivo nell'attività in classe che queste diversità vengano valorizzate e condivise, cercando di rilevare per ciascuna di esse i punti di forza e debolezza.



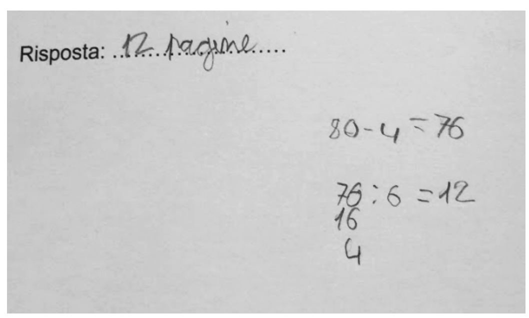
Il 24,8% fornisce una risposta errata. Nel primo quesito la presenza del dato sovrabbondante non sembra creare particolari problemi, essendo molto evidente che si tratta di un elemento utile per contestualizzare il testo. In effetti, sono pochi gli allievi che lo esplicitano in un calcolo scritto. Tuttavia non possiamo escludere che qualcuno l'abbia comunque utilizzato per individuare il risultato finale.

La figura a fianco mostra il protocollo di un allievo che utilizza tutti i numeri presenti nel testo partendo dal più grande e via via sottraendo tutti gli altri, compreso il dato dell'età della nonna. In apparenza, i dati vengono coinvolti nel processo risolutivo senza nessuna logica rispetto al testo del problema, se non quella di utilizzare tutti i dati presenti nel testo. Neanche la presenza del simbolo "°" a fianco al numero 80, per identificare il numero ordinale, fa riflettere l'allievo sul significato di quel numero e sul suo ruolo nel processo risolutivo.

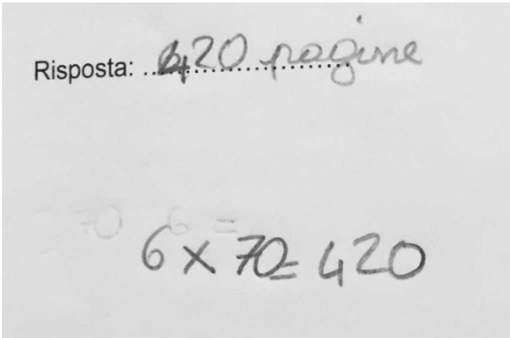


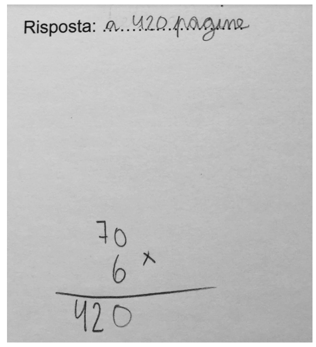
Inoltre, osservando l'algoritmo in colonna, si nota come il risultato 12 derivi dal considerare in modo disgiunto le unità e le decine e dall'operare in ogni colonna togliendo la cifra più bassa da quella più alta senza considerarne la posizione delle cifre (6 – 4 = 2 e 8 – 7 = 1). Lo stesso errore si è evidenziato anche in alcuni protocolli relativi al quesito 3.1.3. precedentemente analizzato a p. 47.

A fianco riportiamo invece il protocollo di un allievo che utilizza il numero 80 invece di 70, svolgendo poi correttamente il processo risolutivo, ma arrivando così ad un risultato sbagliato.

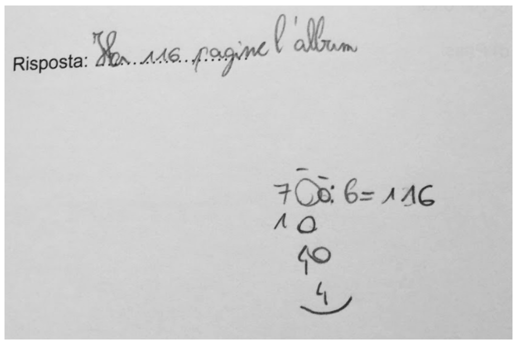


Il 3,5% degli allievi utilizza una procedura moltiplicativa scorretta che porta a risultati inverosimili, come mostrano i seguenti protocolli.



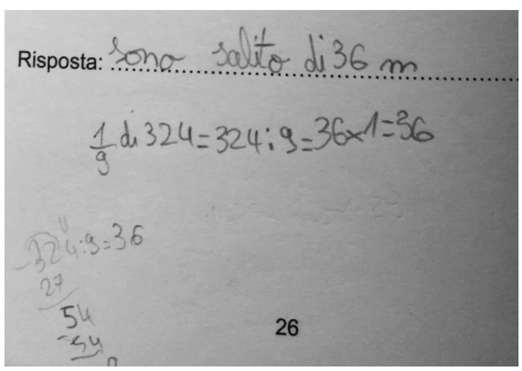


Questi allievi non effettuano una riflessione e interpretazione critica del procedimento e soprattutto del risultato. Non mancano poi allievi che commettono errori nell'esecuzione della divisione. Anche in questo caso una stima corretta dell'ordine di grandezza del risultato numerico avrebbe indotto l'allievo ad un ulteriore controllo dell'algoritmo. Dividere 70 per un numero maggiore di 1 (6 in questo caso) non può fornire un risultato maggiore del dividendo.

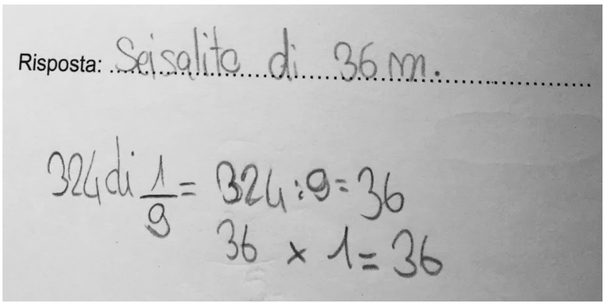


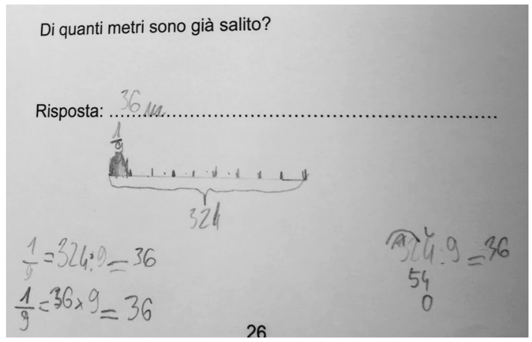
Secondo quesito.
Il quesito è il ventiduesimo del secondo fascicolo e registra un 24,6% di risposte mancanti, confrontabile con ciò che è avvenuto nel quesito precedente. Per rispondere alla domanda, occorre selezionare le informazioni necessarie, prestando attenzione al fatto che si chiede "di quanti metri sono salito" e non quanti scalini. Inoltre, a differenza del primo quesito, in questo caso è richiesto di operare con le frazioni, calcolando ⅑ di 324 m.

Tra coloro che rispondono in modo corretto, la maggioranza esegue la divisione 324 : 9, esplicitandola (34,7%), come riportato nel seguente protocollo, mentre altri scrivono solo il risultato (12,2%).



Nella pagina seguente si riportano alcuni protocolli significativi.

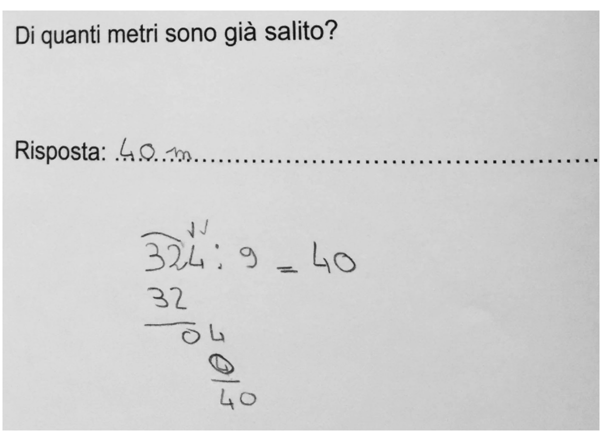


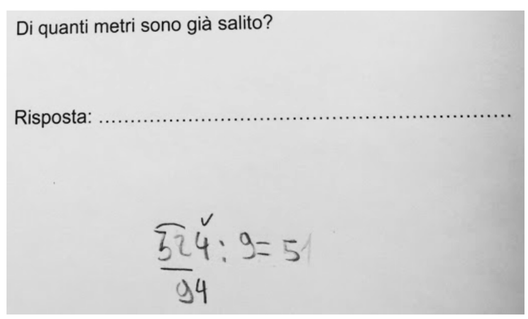


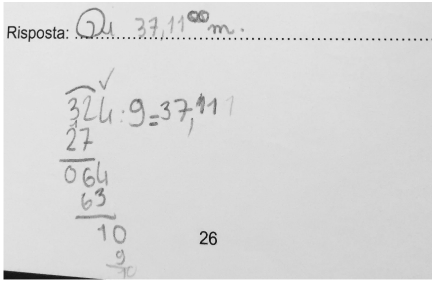
Nel primo, l'allievo scrive erroneamente "324 di ⅑". Da un punto di vista di calcolo matematico tradurre questa scrittura con la moltiplicazione e scrivere ⅑ x 324, oppure 324 x ⅑ , è equivalente, ossia il risultato delle due operazioni è lo stesso, ma dal punto di vista del senso dire "⅑ di 324" indica l'applicazione dell'operatore ⅑ a 324, invece dire "324 di ⅑" non ha alcun significato. Queste osservazioni non devono essere sottovalutate, perché purtroppo spesso l'allievo apprende meccanicamente procedure senza averne capito il senso; atteggiamento che potrebbe creare grandi difficoltà in ambito matematico. Inoltre, in questo protocollo si nota l'esigenza di moltiplicare per 1 il risultato della divisione, nonostante non sia necessario. Questo atteggiamento è riconducibile ad una specifica clausola del contratto didattico detta di *delega formale*, già incontrata nell'analisi di alcuni protocolli relativi al quesito 3.4.6. In questo caso l'allievo segue ciecamente il procedimento che generalmente si applica quando si deve operare con una frazione, senza pensare alla specifica situazione in gioco, che coinvolge la frazione ⅑, quindi con numeratore 1.

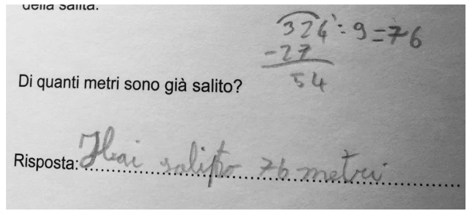
Il secondo protocollo, invece, mostra una particolare rappresentazione utilizzata dall'allievo per rispondere alla domanda. L'allievo rappresenta con un segmento la Torre Eiffel, schematizzando il disegno mostrato nel quesito, riportando solo l'informazione utile alla risoluzione, ossia l'altezza. Elabora poi tale segmento, individuando la frazione richiesta e trovando dunque la soluzione. Questo protocollo riporta una modellizzazione figurale della situazione, assai diversa da quella più consueta.

Il 4,5% degli allievi, invece, propone un procedimento corretto ma riporta una soluzione numerica sbagliata. Poiché nella domanda era richiesto esplicitamente un risultato numerico, le risposte sono state considerate sbagliate. Di seguito si riportano alcuni protocolli che evidenziano errori diversi nell'eseguire l'algoritmo.

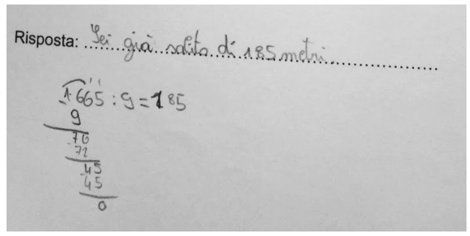




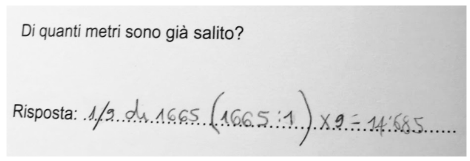


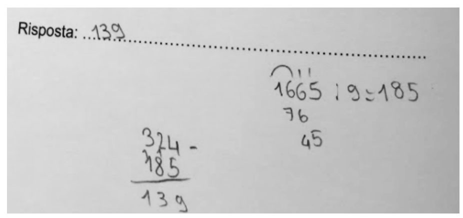


Tra le risposte errate solo il 3,7% esplicita il calcolo di ⅑ di 1665 scalini, invece di 324 m, trovando 185, come mostra il protocollo a fianco.



Tra questi allievi c'è anche chi confonde il ruolo del numeratore e denominatore nella frazione come operatore (protocollo qui a fianco), o chi combina in modo creativo il numero di scalini e l'altezza in metri della torre (protocollo sotto).
In nessun caso è stato rilevato l'uso nel numero 1889, riferito all'anno di inaugurazione.





Seconda somministrazione.
Per questo quesito è stata effettuata la seconda somministrazione e sono state effettuate interviste mirate agli allievi di prima media per indagare le cause di eventuali difficoltà.

	Percentuali prima somministrazione (V SE)	**Percentuali seconda somministrazione (I SM)**
Risposte corrette	46,9%	37,4 %
Risposte errate	28,5%	31,0%
Risposte mancanti senza motivazione	24,6%	19,0%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	12,6%

Le percentuali di risposte corrette diminuiscono nella seconda somministrazione in modo abbastanza significativo e aumentano quelle scorrette, che possono essere così suddivise:

Descrizione categorie errate	Percentuale prima somministrazione (V SE)	Percentuale seconda somministrazione (I SM)	N. studenti intervistati
L'allievo calcola ⅑ di 1665	3,7%	4,0%	2
L'allievo mostra un procedimento corretto ma commette errori di calcolo	4,5%	0,6%	0
L'allievo indica come soluzione 9	2,0%	0%	0
Altro	18,3%	26,4%	18

Di seguito si riporta qualche estratto delle interviste per indagare le motivazioni.

Risposta fornita	Trascrizione dell'intervista
19 m	I.: "Come hai fatto per trovare 19? Che calcoli hai fatto?" A.: "Ho misurato quanto spazio c'era tra questi due punti (indicando sull'immagine gli estremi del segmento che indica ⅑) e ho trovato 0,9." I.: "Ah con il righello!" A.: "Sì poi ho visto che mi chiedeva ⅑ allora ho messo 1 al posto dello 0 e veniva 19."
100	A.: "Una volta sono andata a vederla e c'era un cartello con scritto 100 m."
19	A.: "Ho visto anche ad occhio, ho guardato e ho pensato ad occhio... Ho pensato che se tu giravi il numero e poi così ho pensato che uscirebbe." I.: "Non ho capito cosa intendi con girare il numero." L'allievo rilegge il testo. A.: "Io ho pensato anche da vista, ho pensato che 19 metri ci può arrivare a quell'altezza e allora ho girato il calcolo e ho messo prima il 9 e poi l'1 (scrivendo 19) e quindi dopo ho pensato 19 metri." I.: "Quindi visto che c'era l'1 e il 9 hai giocato con queste cifre e hai scelto 19. E perché non 91?" A.: "Perché ho pensato che 91 sarebbe arrivato qua (indicando un punto più in alto)." I.: "Ah troppo in alto quindi!"

Questi stralci di interviste evidenziano come, in parte, alcuni allievi (prima e terza intervista) si siano lasciati fuorviare dalla presenza dell'immagine che avrebbe dovuto in realtà essere di aiuto per visualizzare mentalmente la situazione. Trattandosi di un monumento, forse lontano dall'esperienza dell'allievo, poteva risultare importante fornire una rappresentazione figurale. Gli allievi in questi due casi hanno utilizzato la frazione ⅑ trattandola in modo fantasioso, ma completamente scorretto dal punto di vista matematico. Si è perso totalmente il significato di frazione, che è stata considerata nell'ultimo caso come l'unione di due numeri che possono essere manipolati in modo che il risultato sia accettabile "a occhio". Per questi allievi riveste dunque un ruolo centrale ma fuorviante la presenza dell'immagine e dell'esperienza vissuta in prima persona. In particolare, nella seconda intervista l'esperienza personale ha indotto in errore l'allievo invece di aiutarlo ad immaginare la situazione.

3.7. Processo *Esplorare e provare*

3.7.1) Qual è il numero minimo di monete che ti permette di ottenere 8,60 Fr?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

Risposta corretta: b
Risultati:

a	b	c	d	Mancante / non valida
24,6%	33,5%	6,3%	15,9%	19,7%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicira procedimenti sul foglio	30,7%
L'allievo svolge qualche calcolo oppure un disegno	2,8%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita procedimenti sul foglio	48,8%
L'allievo svolge qualche calcolo oppure un disegno	0,6%

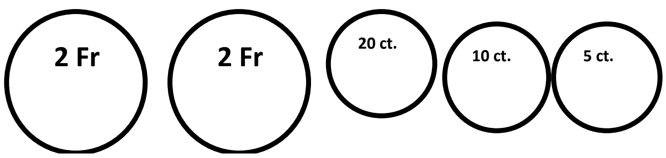
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Matematizzare situazioni aritmetiche e combinatorie concrete a partire da esempi di risultati possibili su cui riflettere.

3.7.2) Alla cassa del supermercato devi pagare 45,65 Fr. Consegni una banconota da 50 Fr. La cassiera ti dà il resto badando a consegnarti il *numero minimo di monete possibile*. Rappresenta nel riquadro le monete che compongono il resto indicando il valore di ognuna di esse come nell'esempio.
Esempio

Resto ricevuto:

Risposta corretta:

Resto ricevuto:



Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
54,3%	32,3%	13,4%

Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo disegna le monete: 2 Fr, 2 Fr, 20 ct., 10 ct., 5 ct. senza esplicitare alcun calcolo	47,4%
L'allievo disegna le monete: 2 Fr, 2 Fr, 20 ct., 10 ct., 5 ct. mostrando il procedimento per ottenere il resto	6,9%

Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo non esplicita alcun calcolo e disegna delle monete il cui valore totale non corrisponde al valore del resto	11,4%
L'allievo disegna le monete 5 Fr, 20 ct., 10 ct., 5 ct., mostrando con il calcolo in colonna l'errore commesso	5,9%
L'allievo disegna il corretto valore del resto ma non utilizza il numero minimo di monete	4,1%
L'allievo disegna monete inesistenti	2,4%
Altro	8,5%

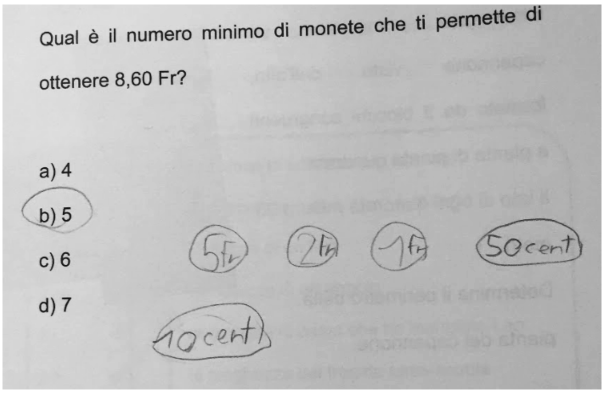
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Grandezze e misure - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Tradurre una situazione della vita quotidiana in linguaggio matematico (aritmetico, grafico, verbale, ecc.), tenendo in considerazione le grandezze e le unità di misura in gioco.

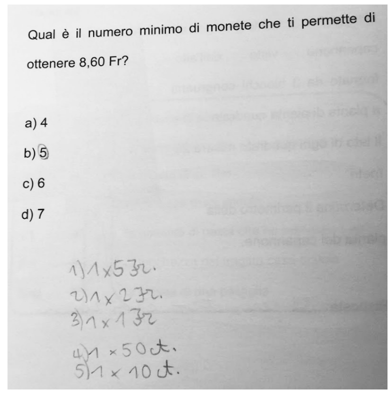
I due quesiti sono inseriti in un contesto molto simile, entrambi richiedono di trovare il minimo numero di monete che individuano un valore, nel primo quesito tale valore è dato, mentre nel secondo occorre anche trovarlo. Tali item richiedono all'allievo di mobilitare anche il processo *Esplorare e provare*, uno dei quattro descritti nel *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015), che assume una particolare importanza nell'attività matematica:

> «Esplorare e provare: esplorare con fiducia e determinazione situazioni matematiche non note, provare ad affrontare per tentativi ed errori, individuare strategie e procedimenti interpretativi e risolutivi, formulare congetture e verificarle o confutarle attraverso verifiche, ragionamenti o produzione di contro esempi».
>
> (DECS, 2015, p. 146)

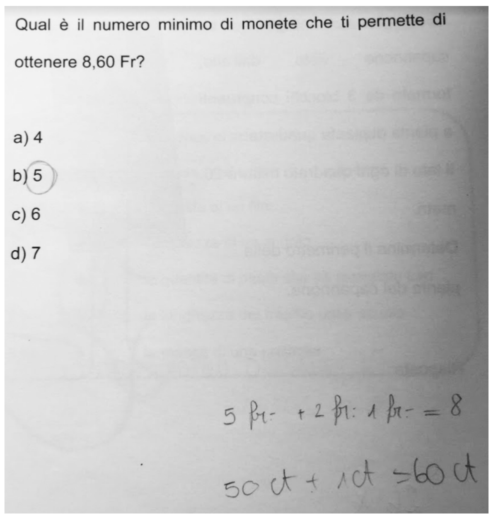
Inoltre, sempre nel Piano di studio si afferma: «Per saper affrontare e risolvere situazioni-problema, sconosciute o connesse con nuove conoscenze, saperle matematizzare e modellizzare, è importante provare personalmente e con creatività» (DECS, 2015, p. 165).
Dal punto di vista didattico è di fondamentale importanza proporre attività che vadano in questa direzione, in modo da coinvolgere attivamente gli allievi, incentivandoli a sperimentare, inventare, tentare, scoprire. Questa tipologia di quesiti permette anche di mobilitare competenze trasversali legate allo sviluppo personale e al pensiero creativo.
Partendo da questa motivazione, si sono voluti inserire questi due quesiti nella stessa categoria, analizzando la loro potenzialità nell'ottica sia del processo cognitivo *Esplorare e provare*, sia del *Matematizzare e modellizzare*, per cui erano stati inizialmente pensati.
La struttura dei due quesiti è diversa, uno è a risposta chiusa con quattro opzioni e uno a risposta aperta. Nonostante tradizionalmente registrino una più alta percentuale di successo i quesiti chiusi, rispetto a quelli aperti dello stesso tema, in questo caso assistiamo al fenomeno inverso.

Primo quesito.
Il primo quesito è il trentatreesimo del primo fascicolo; a questo il 19,7% degli allievi non risponde o la risposta fornita viene considerata non valida.
Uno dei prerequisiti di questo quesito è la conoscenza delle monete svizzere, ma poiché gli allievi sono di quinta elementare si può supporre che questo non abbia creato particolari difficoltà. La richiesta è di individuare il *numero minimo* di monete per individuare un certo valore. Non basta dunque combinare liberamente le monete per ottenere un dato valore (per cui si sarebbe avuto un certo numero di combinazioni), ma occorre individuare una strategia per capire qual è il numero minimo.
Il quesito registra un 33,5% di risposte corrette.
Una possibile strategia che potrebbe condurre alla soluzione è quella di partire dalle monete con valore maggiore e via via valutare la differenza da ottenere con monete di valore sempre inferiore. I protocolli seguenti mostrano presumibilmente un approccio di questo tipo. Gli allievi partono dalla moneta da 5 Fr, per poi aggiungere nell'ordine una moneta da 2 Fr, una moneta da 1 Fr, 1 moneta da 50 ct., 1 moneta da 10 ct. Questo procedimento richiede una serie di operazioni aritmetiche che evidentemente gli allievi eseguono a mente.

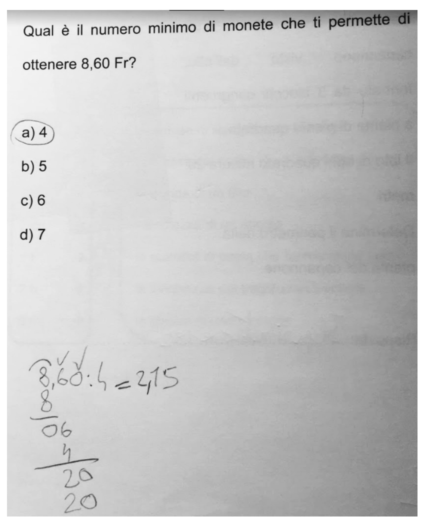




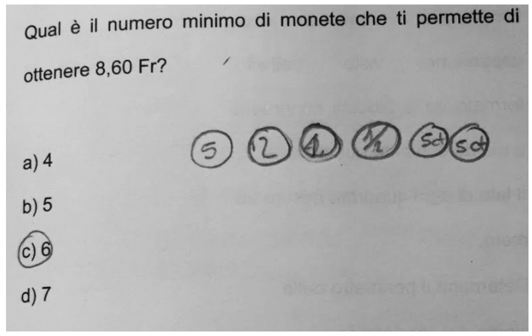
Analogamente opera l'allievo seguente, anche se in questo caso suddivide esplicitamente i franchi dai centesimi.



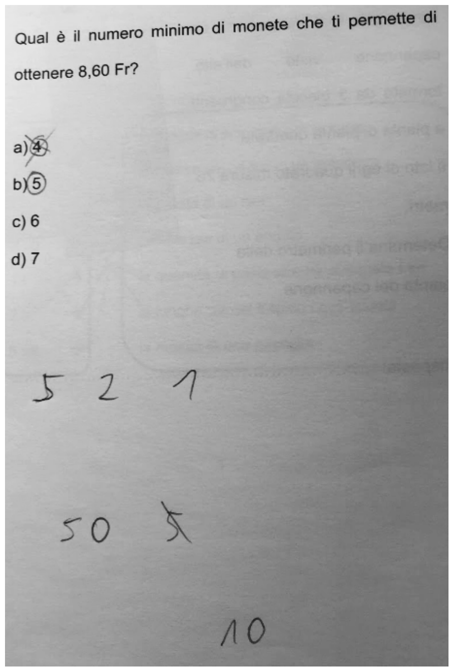
Tra le opzioni errate la a) è quella più scelta (24,6%). Una possibile spiegazione può essere legata al fatto che alcuni allievi possono aver associato la richiesta dell'individuazione del numero minimo di monete al numero più piccolo (minimo) presente tra le opzioni, che in alcuni casi è stato utilizzato insieme al dato 8,60 Fr presente nel testo (protocollo a fianco). È evidente che ci sia in questo caso un'incomprensione della consegna e un tentativo di utilizzare le informazioni del testo, anche se in modo erroneo.



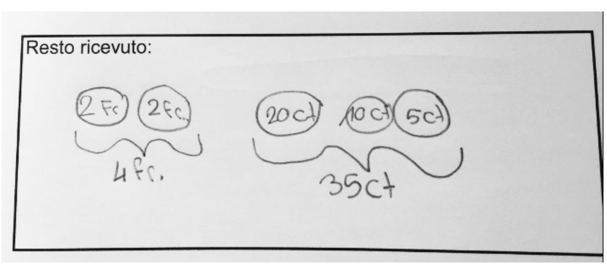
Tra coloro che rispondono 6 (6,3%) e 7 (15,9%) alcuni individuano una possibile combinazione di monete il cui valore complessivo è 8,60 Fr come richiesto, ma che non risulta essere la combinazione che ne utilizza il minor numero (protocollo a fianco).

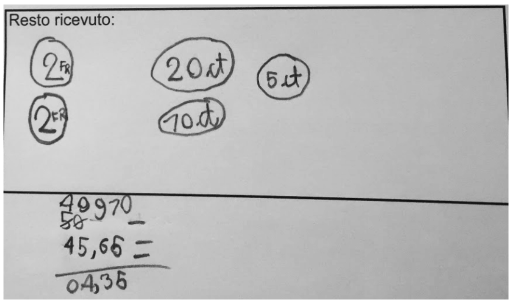


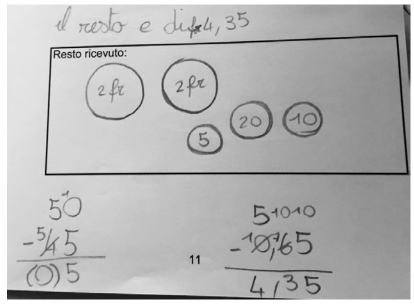
Altri, invece, mostrano ripensamenti, errori e correzioni, come nel caso seguente.



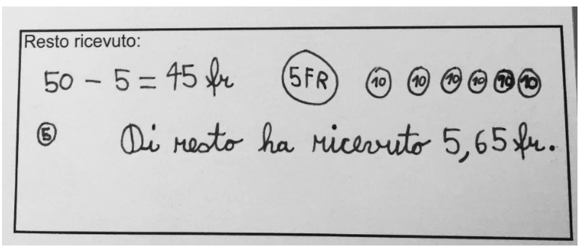
Secondo quesito.
Questo quesito è il settimo del secondo fascicolo e registra il 13,4% di risposte mancanti. A differenza del primo quesito, in questo caso è necessaria un'operazione in più, derivante dalla richiesta di individuare il resto, che si può ottenere effettuando la sottrazione: 50 - 45,65; in seguito si domanda di ottenere questo valore utilizzando il minor numero di monete. Il 54,3% degli allievi ha risposto in modo corretto, a volte riportando solo il disegno delle monete richiesto (47,4%) a volte mostrando il procedimento utilizzato (6,9%). Si riportano di seguito alcuni protocolli di allievi che hanno risposto correttamente tramite rappresentazioni differenti.

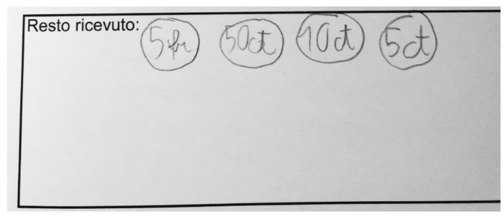




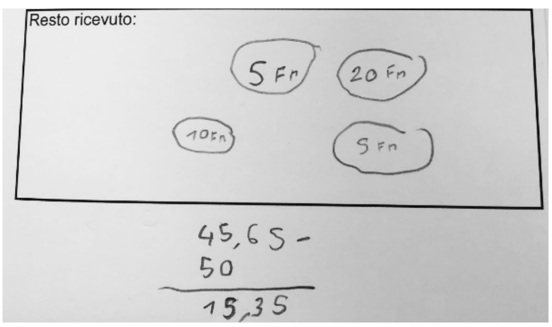


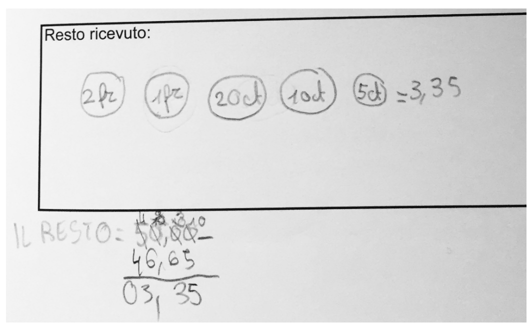
Tra le risposte scorrette, il 17,3% degli allievi effettua errori nel calcolo del resto e, di conseguenza, la rappresentazione delle monete indica un valore errato. Tra questi il 5,9% commette lo stesso tipo di errore nell'esecuzione della sottrazione, ossia nell'algoritmo in colonna sottrae la cifra più piccola dalla più grande senza prestare attenzione al riporto. Questi allievi operano nella parte intera facendo 50 – 45 = 5 e nella parte relativa ai centesimi considerano 65 – 0 = 65, dunque il risultato finale diventa 5,65 Fr. Questa tipologia di errori è già stata analizzata a proposito dei quesiti 3.1.3. e 3.6.2. Ciò si evince dai protocolli seguenti.

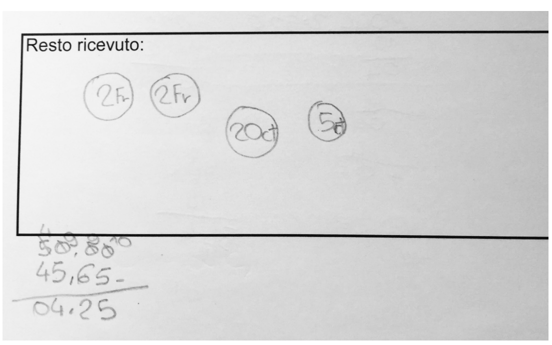


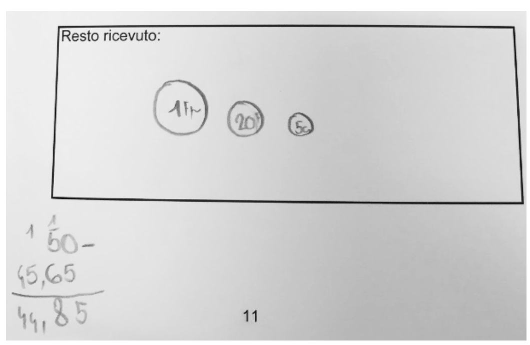


Altre tipologie di errori dovuti ad una scorretta applicazione dell'algoritmo della sottrazione sono evidenti nei protocolli seguenti, come sottrarre il numero più piccolo dal più grande, e non viceversa, e non saper operare la sottrazione tra decimali.

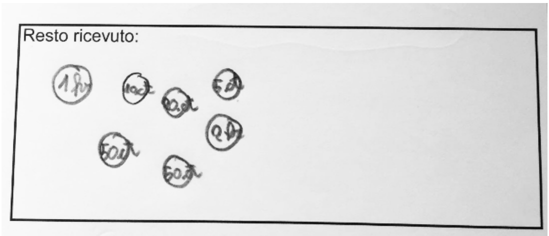


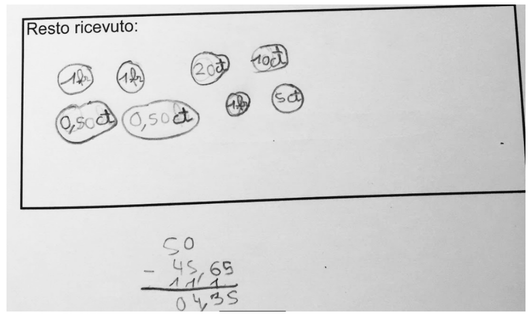


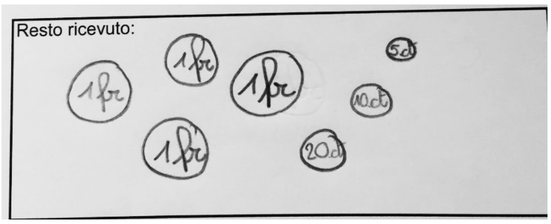


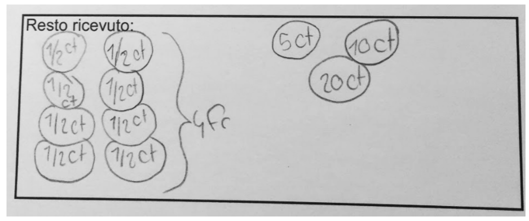


Il 4,1% non commette errori nell'esecuzione dell'algoritmo della sottrazione, ma non individua il numero minimo di monete per formare il valore trovato, come si evince dai protocolli seguenti. In questi casi la difficoltà rilevata non è tanto ascrivibile all'utilizzo delle procedure matematiche, bensì alla comprensione del testo e della richiesta esplicitata.

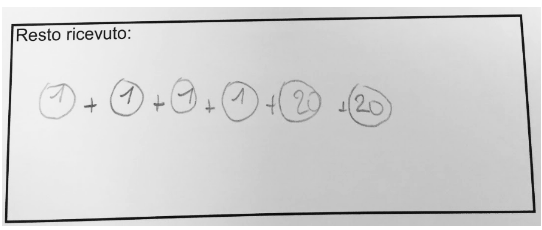


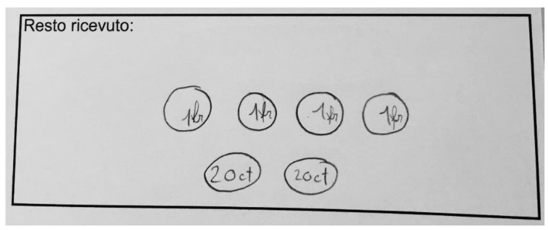




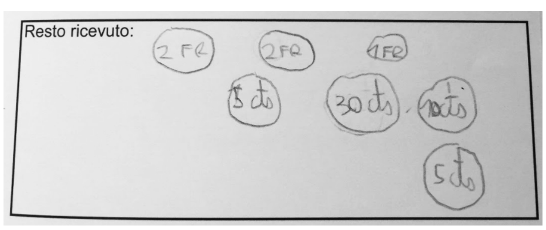


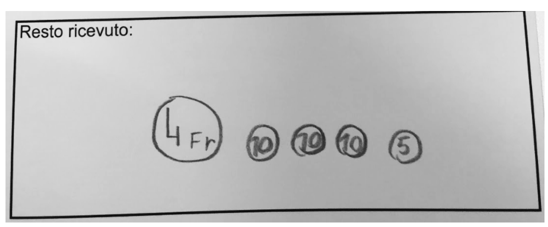
I protocolli seguenti mostrano risposte scorrette, che sembrerebbero non riconducibili a errori di calcolo. Gli allievi in questi casi utilizzano solo le monete da 1 Fr e da 20 ct. e con queste formano il valore 4,40 Fr. Questo rappresenta il valore più vicino al risultato della sottrazione 4,35 Fr, ottenuto con le sole monete da 1 Fr e 20 ct. Si potrebbe supporre che l'esempio mostrato nel quesito sia stato interpretato dagli allievi in modo vincolante, portandoli a considerazioni fuorvianti. L'immagine esemplificativa potrebbe aver indotto all'errore.

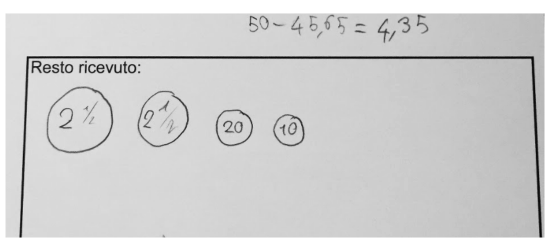




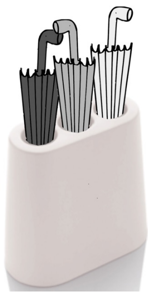
Il 2,4% dimostra di non conoscere le monete svizzere, dal momento che rappresenta valori di monete inesistenti (vedi protocolli seguenti). Una percentuale sicuramente molto bassa, ma in ogni caso meritevole di essere rilevata.







3.7.3) Piove. Nell'atrio di una scuola c'è un certo numero di portaombrelli di due tipi: un tipo che può contemere 3 ombrelli e un altro che ne può contenere 4.



Gli allievi mettono i loro 19 ombrelli nei vari portaombrelli, riempiendoli tutti. Piero ritiene che ci siano 5 portaombrelli da 3 e 1 da 4.
Indica un'altra possibilità.

Risposta: ....

Risposta corretta: 1 portaombrelli da 3 e 4 portaombrelli da 4.
Risutati:

Risposta corretta	Risposta errata	Mancante
44,5%	29,3%	26,2%

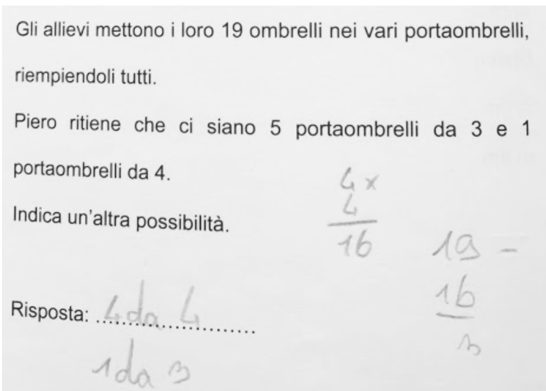
Descrizione categorie corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone una risposta corretta senza esplicitare calcoli o rappresentazioni	41,7%
L'allievo propone una risposta corretta mostrando i calcoli necessari per controllare la scelta	2,8%

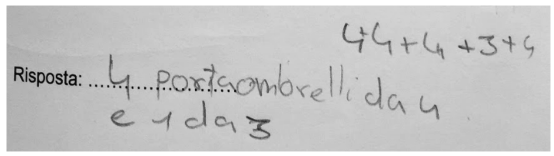
Descrizione categorie non corrette	Percentuale del campione
L'allievo propone un numero di portaombrelli sbagliato	13,0%
L'allievo propone una risposta corretta in quantità di ombrelli però presentando dei portaombrelli diversi da quelli proposti nel quesito	8,8%
Altro	7,5%

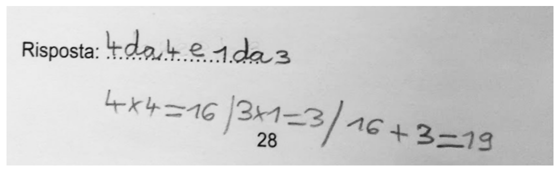
Piano di studio della scuola dell'obbligo (II° ciclo):
Ambito: Numeri e Calcolo - *Aspetto di competenza:* Matematizzare e modellizzare.
Matematizzare situazioni aritmetiche e combinatorie concrete a partire da esempi di risultati possibili su cui riflettere.

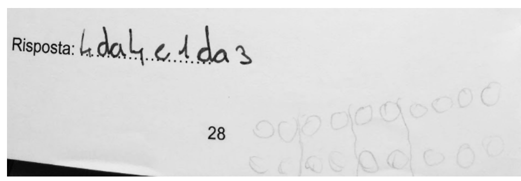
Il quesito è il ventiquattresimo del primo fascicolo e registra il 26,2% di risposte mancanti. È a risposta aperta univoca e presuppone che l'allievo individui altre possibili combinazioni di portaombrelli da 3 e da 4, oltre a quella già fornita nel testo. In questo senso l'allievo è indotto a tentare facendo prove e verificando il risultato ottenuto. Per questo motivo è stato inserito nella categoria legata al processo *Esplorare e provare*. Una delle strategie efficaci e alla portata di un allievo di quinta elementare è dunque quella di sommare multipli di 3 e multipli di 4 fino a ottenere esattamente 19. Il quesito risulta abbastanza complesso perché presuppone l'elaborazione di alcune operazioni aritmetiche e una verifica del risultato, anche se esplicitamente non richiesta. Il numero di portaombrelli delle due diverse tipologie che soddisfa il fatto che tutti siano pieni si traduce matematicamente nel trovare una combinazione lineare di 3 e 4 che porti al risultato 19; in altri termini si chiede quali multipli di 4 e 3 addizionati insieme diano come somma 19. L'unica risposta possibile oltre a quella già data è 1 portaombrelli da 3 e 4 portaombrelli da 4.

Il 44,5% degli allievi fornisce la risposta corretta e in alcuni casi esplicita un procedimento che mostra il ragionamento adottato. I protocolli seguenti riportano approcci diversi legati a procedimenti sottrattivi, moltiplicativi o additivi.



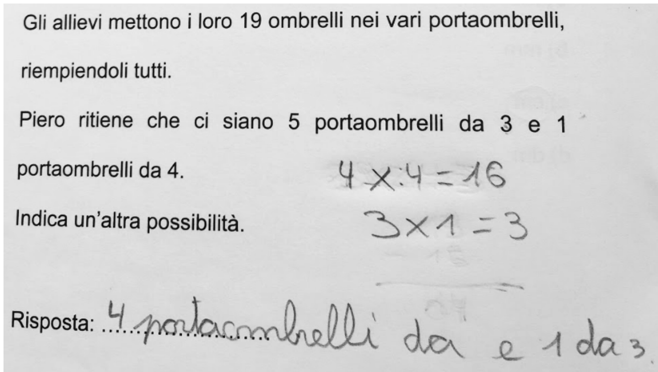




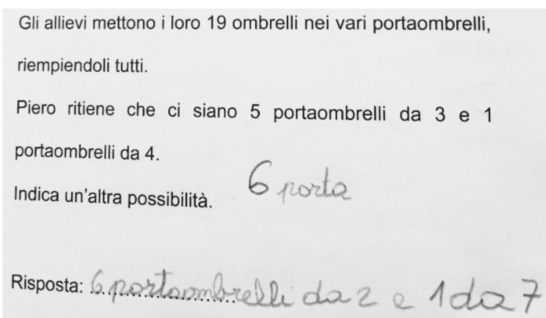


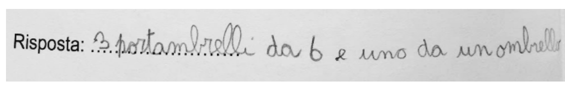
Il protocollo a fianco risulta particolarmente interessante perché l'allievo utilizza una strategia che coinvolge rappresentazioni figurali. L'allievo rappresenta i 19 ombrelli con cerchietti e li raggruppa 4 a 4 individuando i portaombrelli da 4 e di conseguenza valuta, per differenza, quanti portaombrelli da 3 sono necessari. La varietà di risoluzioni fornite dagli allievi a questo tipo di quesiti, può essere un incentivo per l'insegnante per valorizzarle e avviare una riflessione sulla matematizzazione e modellizzazione della situazione, attraverso l'impiego di diversi registri semiotici. L'utilizzo spontaneo e consapevole di forme di rappresentazione grafica potrebbe contribuire alla comprensione delle relazioni numeriche espresse dal testo di un problema. Ciascun allievo nel risolvere un problema tende a prediligere un registro semiotico (verbale, iconico, simbolico ecc.) piuttosto che un altro, ma a livello collettivo è interessante coinvolgere gli allievi in riflessioni di carattere metacognitivo che evidenzino i confronti tra le varie scelte, mostrando i diversi tratti distintivi delle rappresentazioni, i loro significati, i pregi e i difetti e le possibili relazioni. Ciò consente di favorire il passaggio da una rappresentazione ad un'altra, che risulta sicuramente auspicabile e produttivo per la risoluzione dei problemi.

In alcuni protocolli emerge la presenza di alcune cancellature che nascondono l'esecuzione di calcoli scorretti. Sarebbe stato interessante analizzare i tentativi, gli errori, le scelte dell'allievo prima di quella considerata per lui definitiva. D'altronde come afferma Zan (2011, p. 2): «Nella sua attività il matematico infatti si pone ed affronta problemi, e quindi esplora, congettura, sbaglia, torna indietro, cambia strada… non procede in modo lineare e pulito». Ed è proprio questo atteggiamento che dovrebbe essere indotto negli allievi che fanno matematica. Lo stesso Enriques (1938) parlava di *dimensione costruttiva dell'errore*, dando una connotazione completamente diversa all'errore in matematica rispetto a quella vigente in quel periodo. In quest'ottica, i tentativi sbagliati, le strategie che si rivelano inefficaci, le ripetizioni fanno parte di quell'attività matematica che mira a costruire competenze e non solo abilità esecutive.

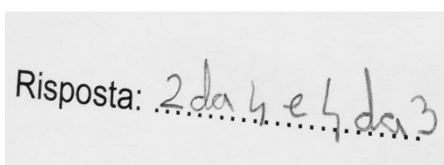

Gli allievi mettono i loro 19 ombrelli nei vari portaombrelli,
riempiendoli tutti.
Piero ritiene che ci siano 5 portaombrelli da 3 e 1
portaombrelli da 4.
Indica un'altra possibilità.
4 x:4 = 16
3x1 = 3
Risposta: 4 portaombrelli da e 1 da 3.

Le risposte scorrette sono il 29,3%; l'8,8% presenta una combinazione che riporta la quantità totale di ombrelli giusta, ossia 19, ma utilizza tipologie di portaombrelli non previste, ad esempio da 6, da 1 e da 7 (vedi protocolli seguenti). In questo caso gli allievi rispettano solo una delle condizioni poste dalla situazione, il numero totale di ombrelli, ma non la tipologia di raggruppamento.

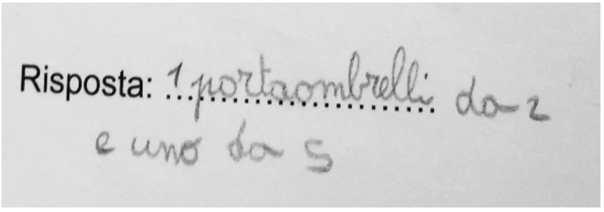

Gli allievi mettono i loro 19 ombrelli nei vari portaombrelli,
riempiendoli tutti.
Piero ritiene che ci siano 5 portaombrelli da 3 e 1
portaombrelli da 4.
Indica un'altra possibilità. 6 porta
Risposta: 6 portaombrelli da 2 e 1 da 7

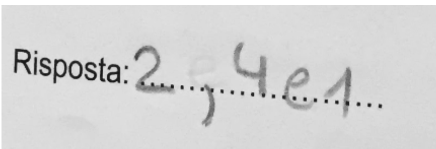

Risposta: 3 portaombrelli da 6 e uno da un ombrello

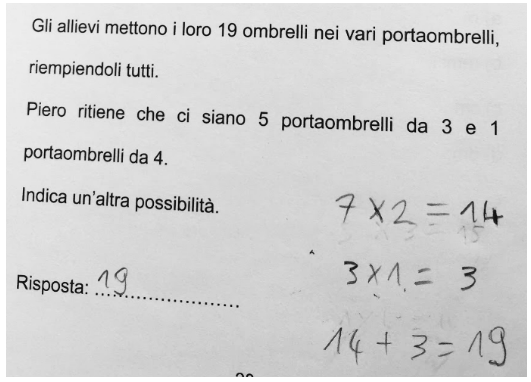
Il 13,0% degli allievi, invece, riporta soluzioni dove il numero di ombrelli totale non coincide con la richiesta del testo, ma vengono rispettate le tipologie di portaombrelli, considerando ancora una volta solo una parte delle condizioni iniziali (vedi protocollo seguente).


Risposta: 2 da 4 e 4 da 3

Nella categoria "Altro" (7,5%) sono comprese risposte variegate di allievi che utilizzano un numero scorretto sia di ombrelli che di portaombrelli, oppure che commettono errori di calcolo o che forniscono risposte non comprensibili.







4. Conclusioni

4. Conclusioni

In questo rapporto si è presentata l'analisi didattica della prova standardizzata di matematica di quinta elementare relativa al processo *Matematizzare e modellizzare*. Dall'analisi quantitativa dell'intera somministrazione è emerso che tale aspetto di competenza ha creato maggiore difficoltà per gli allievi. Per questo, è stato scelto per effettuare un'indagine qualitativa degli ostacoli riscontrati nei protocolli e, successivamente, delle erronee convinzioni emerse dalle interviste realizzate. Da questa analisi si sono riscontrate difficoltà ed errori sistematici commessi dagli allievi e alcuni aspetti positivi che è bene valorizzare. Questi ultimi sono limitati vista la scelta del processo da analizzare.
La schematizzazione del ciclo della matematizzazione presentata nel capitolo 2, e ripresa in Figura 5, ha permesso di interpretare l'origine degli errori commessi dagli allievi, inquadrando in modo più specifico le difficoltà emerse.

Figura 5. Il ciclo della matematizzazione

I risultati ottenuti confermano le difficoltà degli studenti relative alla risoluzione dei problemi, già evidenziate in letteratura e riportate nel paragrafo 2.3.

- I due aspetti seguenti fanno riferimento in modo puntuale alle difficoltà emerse in seno al processo *formulare* del ciclo della matematizzazione:

Comprensione della situazione. Emerge con forza l'importanza del ruolo che riveste il linguaggio nell'apprendimento della matematica e l'influenza che ha la comprensione del testo nella risoluzione di un problema. Dai protocolli si rilevano spesso "comportamenti patologici" a lungo evidenziati dalla ricerca in didattica della matematica. Tra questi spicca un atteggiamento di *lettura selettiva del testo*, orientata alla ricerca di dati numerici da combinare, di parole chiave che suggeriscano il modo di combinarli e della successiva trascrizione del risultato di un algoritmo, senza una lettura profonda del testo e del suo significato. Spesso l'intervista condotta agli allievi di prima media conferma profonde incomprensioni del testo, dovute alla non conoscenza del significato di alcune parole o alla interpretazione scorretta della situazione proposta. Inoltre, in alcuni quesiti la presenza e la tipologia dell'immagine proposta nel testo ha rappresentato un fattore influente, o addirittura fuorviante, per la scelta consapevole della risposta.

Trasformazione del testo in un modello matematico. Come dimostrano le ricerche di Clements (1980), il fallimento degli allievi che non sanno risolvere problemi avviene nelle fasi precedenti all'applicazione delle procedure matematiche. In generale si evince che la fase di matematizzazione orizzontale, e dunque il passaggio dal problema nel contesto al problema matematico, è particolarmente delicata ed è spesso fonte di difficoltà per gli allievi. Infatti, dall'analisi delle risposte errate emergono in vari casi difficoltà nell'individuazione del modello matematico adatto a risolvere il problema. Alla base di tali difficoltà spesso si riscontra una incomprensione delle relazioni numeriche in gioco nella situazione descritta, una incapacità di stabilire collegamenti tra il linguaggio naturale e quello specifico della matematica, e più in generale una incapacità di gestire le diverse rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici e di passare dall'una all'altra nella fase di modellizzazione.

- Di seguito si riportano le difficoltà riscontrate nel processo *utilizzare* del ciclo della matematizzazione:

Risoluzione matematica. Nella fase di esecuzione delle procedure emergono errori dal punto di vista algoritmico legati ad esempio ai riporti e ai prestiti nelle operazioni, in particolare con numeri decimali, e all'errata concettualizzazione del segno "=", al quale gli allievi tendono ad associare un significato procedurale piuttosto che relazionale. Quest'ultima consuetudine si è dimostrata assai diffusa e radicata e potrebbe sfociare in grosse difficoltà nei livelli scolastici successivi, arrivando persino ad inibire l'apprendimento della risoluzione ragionata e consapevole delle equazioni. Inoltre, è emersa una preferenza per il calcolo in colonna piuttosto che in riga, nonostante si osservi come in quest'ultimo caso gli allievi commettano meno errori.

- Si riporta successivamente una sintesi delle difficoltà emerse nella fase *interpretare* del ciclo della matematizzazione:

Interpretazione dei risultati. Un altro aspetto che emerge con evidenza da questa analisi è la mancanza di rilettura critica dei procedimenti e dei risultati numerici ottenuti rispetto al contesto della situazione, che dovrebbe in realtà rappresentare una componente importante della risoluzione dei problemi, e più in generale della matematizzazione. Tale importante fase del processo risolutivo viene spesso trascurata dai docenti, e di conseguenza dagli studenti, ed è solitamente legata e influenzata negativamente dalle convinzioni sulle aspettative dell'insegnante e sul senso della matematica stessa. Abituare gli allievi a interpretare criticamente i risultati ottenuti e a contestualizzarli all'interno della situazione di partenza è di certo auspicabile e permetterebbe in molti casi di evitare errori. In questa fase del ciclo della matematizzazione osserviamo non di rado anche una difficoltà legata al comunicare e argomentare, riflettendo sia sul processo di modellizzazione sia sui risultati ottenuti. Il linguaggio gioca un ruolo centrale anche nel processo di esplicitazione dei procedimenti risolutivi, infatti dalle interviste e dall'analisi dei protocolli sono spesso evidenti difficoltà nel rappresentare verbalmente risorse cognitive e processi messi in atto nella procedura risolutiva di un esercizio/problema. Tali difficoltà sono dovute probabilmente alla scarsa abitudine ad argomentare e giustificare le proprie scelte. È importante che entri nella prassi didattica fin dalla scuola dell'infanzia la consuetudine a esprimere verbalmente osservazioni e considerazioni, spiegazioni di procedure e ragionamenti. Nello sviluppo di tale competenza, l'interazione con gli altri gioca un ruolo fondamentale per affinare la modalità di spiegare a parole; infatti, la necessità di convincere gli altri che il proprio procedimento è corretto, rende sempre più esplicito il pensiero e sempre più precisa la verbalizzazione. Saper comunicare la matematica è un traguardo di competenza specifico che andrebbe curato maggiormente, concentrandosi in particolare sui processi risolutivi piuttosto che sui prodotti. Tuttavia soprattutto dalle interviste si percepisce una convinzione fuorviante degli allievi nei confronti della matematica, vissuta come disciplina in cui viene richiesto di memorizzare, applicare e restituire un risultato, piuttosto che comprendere, indagare e ragionare sulle strategie.

- La fase *valutare* del ciclo della matematizzazione non è rientrata nell'analisi dei quesiti in quanto fa riferimento ad un contesto aperto, in cui il problema viene ridefinito sulla base dei risultati ottenuti e vengono ristrutturati i modelli utilizzati in precedenza. La natura di questo processo difficilmente rientra in un utilizzo dei problemi con fini valutativi, come invece avviene per le prove standardizzate.

Va inoltre osservato che la somministrazione di alcuni quesiti agli allievi di prima media ha permesso di evidenziare un fenomeno, già conosciuto in letteratura, relativo ad un peggioramento a volte sensibile delle prestazioni degli allievi che a settembre ricominciano la frequenza scolastica dopo il periodo estivo. Non di rado dunque ritroviamo percentuali di risposte errate maggiori in prima media rispetto a quelle di fine quinta elementare.

Oltre agli aspetti di debolezza evidenziati, lo studio di centinaia di protocolli ha fatto emergere un aspetto positivo molto interessante: la presenza di una grande varietà di strategie, procedimenti e rappresentazioni. Una ricchezza che potrebbe essere valorizzata dall'insegnante tramite il confronto e la discussione collettiva, e che consente di mostrare agli allievi come la strada per arrivare ad una soluzione non è mai unica.

Le diverse considerazioni riportate in questo documento possono fornire una chiave di lettura delle difficoltà e dei punti di forza che gli allievi dimostrano di possedere nella risoluzione dei problemi e possono essere utilizzate da ogni insegnante per migliorare da un lato la consapevolezza dei propri modelli (impliciti o espliciti) di insegnamento e, dall'altro, la comprensione delle caratteristiche dell'apprendimento dei propri allievi.

Bibliografia

Arrigo, G. (2009). Problemi scolastici nell'ottica del problem solving. *Bollettino dei docenti di Matematica*, 59, 69-76.

Barber, M., & Fullan, M. (2007). Trilevel Development: It's the system. *The F. M. Duffy Reports*, 12(1), 1-4.

Bazzini, L. (1995). Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica: considerazioni teoriche e didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2, 107-129.

Bernardi, C. (2000). Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della 'e'. *Progetto Alice*, 1(1), 11-21.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 9(9), 48-93.

Bolondi, G. (2005). *La matematica quotidiana.* Milano: Ed. Mimesis.

Bolondi, G. (2011). Dalla valutazione all'intervento didattico e formativo. PQM 2010/2011. Disponibile in http://www.icsalvodacquistomessina.gov.it/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=61&Itemid=2 (consultato il 31.08.2017).

Bolondi, G., Censi, R., & Sbaragli, S. (2013). Analisi e confronto delle prove di valutazione esterna per la scuola media incrociate tra Canton Ticino e Italia. *Bollettino dei docenti di matematica*, 67, 55-82.

Borasi, R. (1984). Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *(2)*7, 83-98.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 221–239. Disponibile in http://dx.doi.org/10.1007/s10649-013-9507-1 (consultato il 31.08.2017).

Brousseau, G. (1983). Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathèmatiques. Thèse de Doctorat d'État. Université de Bordeaux I.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnosing models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive skills. Cognitive Science*, 2, 115-192.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A. M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., & Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 25(3), 255-270.

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze*. Roma: Carocci.

Castro, C., Locatello, S., Meloni, G. (1996). Il problema della gita. Uso dei dati impliciti nei problemi di Matematica. *La Matematica e la sua didattica*. 2, 166-184.

CDPE (2011). *Competenze fondamentali per la matematica*. Disponibile in http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf (consultato il 24.04.2017).

Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. NCTM, Reston: Virginia.

Clements, M. A. (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 11(1), 1-21.

Cottino, L., Dal Corso, E., Francini, M., Gualandi, C., Nobis, C., Ponti, A., Ricci, M., Sbaragli, S., & Zola, L. (2011).

Misura. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora.

Crescentini, A. (2016). *Prove standardizzate ticinesi. Matematica nella classe V Scuola Elementare.* Locarno: Centro Innovazione e Ricerca sui Sistemi Educativi.

Crescentini, A., Salvisberg, M., & Zanolla, G. (2014). *Prove standardizzate di Matematica per la scuola elementare I.* Quaderni di ricerca (8). DFA-SUPSI, Locarno.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving.* Progetto Ma.S.E., vol. XA. Milano: Angeli ed.

D'Amore, B. (1996a). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino*, 32, 57-64.

D'Amore, B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica*, 4, 424-439.

D'Amore, B. (1997a). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. *Riforma e didattica*, 1, 29-36.

D'Amore, B. (1997b). Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *20A*(3), 241-256.

D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 28- 47.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica,* 4, 557-583.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Area e perimetro. Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, 2, 165-190.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29AB*(6), 645-664.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Trento: Erickson.

D'Amore B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 43-52.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendinento della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.

D'Amore, B., & Sandri, P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18.

D'Amore B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2, 139-163.

D'Aprile, M., Squillace, A., Armentano, P., Cozza, P., D'Alessandro, R., Lazzaro, C., Rossi, G., Scarnati, A. L., Scarpino, G., Servi, G., & Sicilia, R. (2004). Dillo con parole tue. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *27B*(1), 31-51.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.

DECS (2015). Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 17.04.2017).

De Lange, J. (1987). *Mathematics insight and meaning.* Utrect, Holland: Rijksuniversiteit.

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). *Italmatica. Percorsi di italiano e matematica per la scuola dell'infanzia.* Firenze: Giunti scuola.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015a). Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un "binomio fantastico". In B. D'Amore & S. Sbaragli (eds.), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento*, Bologna: Pitagora, pp. 67-72.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015b). Storie di figure. *Scuola dell'infanzia*, *16*(4), 17-18.

Deri, M., Sainati Nello, M., & Sciolis Marino, M. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *6*(6), 6-27.

Diezmann, C., English, L. D., & Watters, J. J. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In A. D. Cockburn & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2*, Norwich: University of East Anglia, pp. 289-296.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education*, 34(2), 110-136.

Duncker, K. (1935). *Psychologie des produktiven Denkens.* Berlin: Springer.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1998). *Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva?* Bologna: Pitagora.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, *8*(1), 1-45.

Engelhardt, J. M. (1977). Analysis of children's computational errors: a qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology*, 47, 149-154.

English, L. D. (2002). Development of 10-year-olds' mathematical modelling. In: A. N. Cockburn & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th International PME Conference*, Norwich: PME, pp. 329-336.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004a). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal* 2004, *16*(3), 59-80.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004b). Mathematical modelling with young children. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th International PME Conference*, Bergen: Bergen University College, pp. 335-342.

English, L. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303–323.

Enriques, F. (1938). Importanza della storia del pensiero scientifico nella cultura nazionale. *Scientia*, XXXII, vol. LXIII, n. CCCXI-3.

Eurydice (2011). *Mathematics education in Europe: Common challenges and national policies*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Fandiño Pinilla, M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005a). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005b). Una riflessione sulla valutazione in Matematica a partire dalle prove INValSI. In AA.VV.(2005), *Le prove INValSI e la valutazione in matematica*. Disponibile in www.istruzioneferrara.it/documentinew/valermath.pdf (consultato il 31.08.2017).

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica.* Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Diverse componenti dell'apprendimento della matematica. In B. D'Amore (ed.), *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire. Atti del Convegno Nazionale omonimo, 3-4-5 marzo 2014, Tricase (Lecce)*, Bologna: Pitagora, pp. 104.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 26(4), 469-496.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica.* Bologna: Pitagora.

Ferrero, E. (1990). Strategie di calcolo e significati della sottrazione e della divisione tra 7 e 9 anni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 13, 67-86.

Fischbein, E. (1985a). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna: Zanichelli-UMI, pp. 122-132.

Fischbein, E. (1985b). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In L. Chini Artusi (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna: Zanichelli-UMI, pp. 8-19.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publ. Company.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning or Mathematics*, 2, 9-14.

Fischbein, E. (1992a). Modelli taciti e ragionamento matematico. In E. Fischbein, G. Vergnaud (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, Bologna: Pitagora, pp. 25-38.

Fischbein, E. (1992b). Intuizione e dimostrazione. In E. Fischbein, G. Vergnaud (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, Bologna: Pitagora, pp. 1-24.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore, & S. Sbaragli (a cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula*, Bologna: Pitagora, pp. 33-38.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2015). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In Atti del convegno Giscel, Roma, 26-29 marzo 2014.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). Che problema, queste parole! *La vita scolastica.* 2, 16-18.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (a cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche*, Roma: Aracne, pp. 211-224.

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, 1, 38-63.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1), 3–8.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. New York: Basic Books.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 36-45.

Giménez Rodríguez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas.* Madrid: Editorial Sintesis.

Goldin G. A. (1982). The Measure of Problem-solving Outcomes, In F. K. Lester, J. Garofalo (eds.), *Mathematical Problem Solving*, Franklin Institute Press.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-B Press.

Iori, M. (2011). Il senso semiotico-interpretativo delle rappresentazioni degli oggetti matematici e delle loro trasformazioni. In S. Sbaragli (ed.), *La Matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*, Bologna: Pitagora, pp. 125-127.

Iori, M. (2014). La dimensione semio-cognitiva implicata nell'attività di risoluzione di problemi: Analisi di alcuni esempi. In B. D'Amore & S. Sbaragli (eds.) (2013), *Parliamo tanto e spesso di Didattica della matematica. Atti del Convegno Nazionale: Incontri con la matematica, n° 28. 7-8-9 novembre 2014, Castel San Pietro Terme*, Bologna: Pitagora, pp. 171-174.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, Mahwah, NJ: Erlbaum.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683-710.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481-2502.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. F. Coxford (ed.), *The ideas of algebras, Yearbook 1988, K-12*, Reston: NCTM.

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. In M. C. Goldin (ed.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Columbus, OH: ERIC.

Laborde, C. (1995). Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.

Lesh, R. (2006). New directions for research on mathematical problem solving. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Canberra, Vol. 1, pp. 15–34). Adelaide: MERGA.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem* *solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, Charlotte, NC: Information Age Publishing, pp. 763- 804.

Looney, J. W. (2011), Integrating Formative and Summative Assessment: Progress Toward a Seamless System? *OECD Education Working Papers*, 58, OECD.

Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 298-305.

Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. L. Lester, & J. Garofalo (a cura di), *Mathematical problem solving. Issues in research,* Philadelphia: The Franklin Institute Press, pp. 1-13.

McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J. & Farrell, B. (1997). Number sense in school mathematics, student performance in four countries. *MASTEC Monograph series no.*5, Edith Cowan University.

Meckes, L. & Carrasco, R. (2006). SIMCE: Lessons from the Chilean Experience in National Assessment Systems of Learning Outcomes. *World Bank Conference on Latin American Lessons in Promoting Education for All*, Cartagena de Indias, Colombia.

Mons, N. (2009). Les effets théoriques et réels de l'évaluation standardisée. Disponibile in http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/111FR.pdf (consultato il 15.08.2017).

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin*, 39, 31-43.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: Author.

NCTM (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston: Author.

OECD (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2007). *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica: Quadro di riferimento di PISA 2006*. Roma: Armando Editore.

OECD (2010). *PISA 2009 Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematics and Science*. Paris: OECD Publishing.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OEC Paris: OECD Publishing.

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58.

Pellegrino, C. (1999). Stima e senso del numero. In Jannamorelli, B., & Strizzi, A. (eds.). *Allievo, insegnante, sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica.* Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona (Aq), 23-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita. 145-147.

Polya, G. (1945). *How solve it.* Princeton: University Press. [Traduzione italiana: 1967, Milano: Feltrinelli]

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: John Wiley.

Quarteroni, A. (1998). *La modellistica matematica: una sintesi fra teoremi e mondo reale*. Prolusione tenuta in occasione dell'inaugurazione del 136° anno accademico. Politecnico di Milano, 3 ottobre 1998.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237-268.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., & Der, C. Y. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99, 61-70.

Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms*. Tesi di dottorato di ricerca, Purdue University.

Roberts, C. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils. *The Arithmetics Teacher*, May, 442-446.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, 1, 57-71.

Sbaragli, S. (2006). La capacità di riconoscere "analogie": il caso di area e volume. *La matematica e la sua didattica*, 2, 247-285.

Sbaragli, S. (2009). Le insidie della divisione. *La Vita Scolastica*, 14, 18-19.

Sbaragli, S., Cottino, L., Gualandi, C., Nobis, G., Ponti, A., & Ricci, M. (2008a). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in* àmbito *geometrico.* Roma: Armando Armando.

Sbaragli S., Cottino L., Gualandi C., Nobis G., Ponti A., & Ricci M. (2008b). L'analogia in ambito geometrico. *Bollettino dei docenti di matematica*, 57, 71-92.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare.* Locarno: Dipartimento Formazione e Apprendimento.

Schoenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematics problem solving. In R. Lesh & M. Landau, *Acquisition of mathematics concepts and processes*, New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987), What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 189-215.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In Douglas A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics,* New York: Macmillan Publishing Company.

Segovia, I., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en calculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 247-254.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Treccani. (2003). *Il vocabolario Treccani.* (M. Cannella, & B. Lazzarini, A cura di) Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Vergani, A. (2002). *La valutazione esterna delle istituzioni scolastiche e formative: alcune considerazioni introduttive*. AIV- Associazione Italiana di Valutazione.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Wheeler, D. (1982). Mathematization Matters, *For the Learning of Mathematics*, *3*(1), 45-47.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(3), 555-584.

Wyndhamn, J., & Saljo, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning – the study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, *7*(4), 361-382.

Zan, R. (1998). *Problemi e convinzioni*. Bologna: Pitagora.

Zan, R. (2002). Metacognizione, convinzioni e affettività: un approccio integrato alle difficoltà in matematica. In A. Contardi, & B. Piochi (a cura di), *Le difficoltà in matematica. Metodologia e pratica di insegnamento*, Trento: Editrice Erickson, pp. 33-44.

Zan, R. (2007a). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.

Zan, R. (2007b). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *30A-B* (6), 741-762.

Zan, R. (2011). L'errore in matematica: alcune riflessioni. PQM 2010/2011. Disponibile in http://www.liceocapece.gov.it/wp-content/uploads/2016/10/R.Zan-Lerrore-in-matematica-alcune-riflessioni.pdf (consultato il 20.08.2017).

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35(2), 437-467.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Roma: Carocci.

Zan, R. (2017). Il ruolo cruciale del pensiero narrativo nella comprensione dei problemi. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula.* In corso di stampa.

Zan, R., & Di Martino, P. (2002). *Verso una teoria per le difficoltà in matematica*. Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica. Pisa, 31 gennaio - 2 febbraio 2002.

www.supsi.ch/dfa

ISBN 978-88-85585-08-9